Cap ECL DS 9 14/05/2024 CORRIGÉ

Exercice 1

1) $\forall n \geq 1 \quad a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$

a) $\sum\limits_{n \geq 1} a_n$ est une serie géométrique de raison $\frac{1}{2}$ or $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ donc la serie converge.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \underset{(\frac{1}{2} \neq 1)}{=} \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \ell$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x \in]-1, 1[$ $\quad |n^2 (n x^{n-1})| = n^2 \, n |x|^{n-1} = n^3 |x|^{n-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc $n|x|^{n-1} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\frac{1}{n^2}$ de signe fixe

or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (serie de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$)

donc $\sum n x^{n-1}$ est absolument convergente, donc convergente.

- Si $|x| \geq 1$ alors $|n x^{n-1}| = n |x|^{n-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ donc $n x^{n-1}$ ne tend pas vers 0 et $\sum n x^{n-1}$ diverge grossièrement

Ainsi $\sum n x^{n-1}$ converge $\iff x \in]-1, 1[$.

c) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1) x^n - n x^n = x^n$

donc $\sum\limits_{n=0}^{N} ((n+1) x^n - n x^n) = \sum\limits_{n=0}^{N} x^n$

d'où $\sum\limits_{n=1}^{N+1} n x^{n-1} - \sum\limits_{n=0}^{N} n x^n = \sum\limits_{n=0}^{N} x^n$

or $\sum\limits_{n=0}^{N} n x^n = \sum\limits_{n=1}^{N} n x^n = x \sum\limits_{n=1}^{N} n x^{n-1}$

on a donc $\sum\limits_{n=1}^{N} n x^{n-1} + (N+1) x^N - x \sum\limits_{n=1}^{N} n x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{N} x^n$

ainsi $(1 - x) \sum\limits_{n=1}^{N} n x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{N} x^n - (N+1) x^N$.

d'où $\sum\limits_{n=1}^{N} n x^{n-1} = \dfrac{1}{1-x} \left(\sum\limits_{n=0}^{N} x^n - (N+1) x^N \right)$

pour tout $x \in]-1, 1[$, $\sum\limits_{n=0}^{N} x^n \xrightarrow[N \to +\infty]{} \dfrac{1}{1-x}$ (serie géometrique de raison x avec $|x| < 1$)

et $|(N+1) x^N| = (N+1) |x|^N \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$ (car $|x| < 1$, par croissances comparées)

donc $\sum\limits_{n=1}^{N} n x^{n-1} \xrightarrow[N \to +\infty]{} \dfrac{1}{1-x} \left(\dfrac{1}{1-x} + 0 \right)$

d'où $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

d) $b_n = n(a_n - a_{n+1}) = n\left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}\right) = n\left(\frac{1}{2^n}(2-1)\right) = \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

avec $x = \frac{1}{2} \in]-1,1[$ on sait d'après le b) que $\sum_{n\geqslant 1} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ converge

et $\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$

donc $\sum_{n\geqslant 1} b_n = \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 1} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ converge vers $\frac{1}{2}\times 4 = 2$

2) $\forall n \geqslant 2 \quad a_n = \frac{1}{n\ln n}$ et $a_1 = 0$.

a) Soit $f(t) = \frac{1}{t\ln t}$, $\forall t \geqslant 2$; $f'(t) = -\frac{(t\ln t)'}{t^2\ln^2 t} = -\frac{\ln t + 1}{t^2\ln^2 t} < 0$

(car $\ln t > 0$ pour $t \geqslant 2$ donc $\ln t + 1 > 0$)

Soit $n \geqslant 2$ et soit $k \in [\![2, n]\!]$

$\forall t \in [k, k+1]$, $f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k)$ (car f décroît sur $[2$ donc sur $[k, k+1]$)

donc $f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant f(k)$ (par croissance de l'intégrale, avec $k \leqslant k+1$)

d'où $\int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant f(k)$

ainsi $\sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}$

$\int_2^{n+1} \frac{1}{t\ln t}\,dt \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} = A_n$ (car $a_1 = 0$)

or $\int_2^{n+1} \frac{1}{t\ln t}\,dt = \left[\ln(\ln t)\right]_2^{n+1} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

par minoration, $A_n \longrightarrow +\infty$

d'où $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ diverge

b) $n a_n = \frac{1}{\ln n} \longrightarrow 0$

c) $b_n = n(a_n - a_{n+1}) = n a_n - n a_{n+1} = \frac{1}{\ln n} - \frac{n}{(n+1)\ln(n+1)}$

$= \frac{(n+1)\ln(n+1) - n\ln n}{(n+1)\ln n \ln(n+1)} = \frac{n\ln(n+1) + \ln(n+1) - n\ln n}{(n+1)\ln n \ln(n+1)}$

$= \frac{n\left(\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) + \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - n\ln n}{(n+1)\ln n \ln(n+1)}$

$= \frac{(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln n}{(n+1)\ln n\left(\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)} = \frac{(n+1)\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \ln n}{(n+1)\ln n\left(\ln n + o(1)\right)}$

$= \frac{1 + \frac{1}{n} + o(1) + \ln n}{(n+1)\ln n\left(\ln n + o(1)\right)} \sim \frac{\ln n}{n\ln^2 n} = \frac{1}{n\ln n}$

or $\forall n \geqslant 2 \quad \frac{1}{n\ln n} \geqslant 0$ et $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln n}$ diverge (avec le a))

donc $\sum_{n\geqslant 2} b_n$ diverge ; donc $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ diverge

$\frac{3}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$.

3) On suppose que $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge et que (a_n) est décroissante

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$\forall p \in [\![n+1, 2n]\!] \quad a_p \geqslant a_{2n}$ (car (a_n) décroît)

d'où $\displaystyle\sum_{p=n+1}^{2n} a_p = u_n \geqslant \underbrace{(2n-(n+1)+1)}_{\text{nombre de termes}} a_{2n} = n\, a_{2n}$

b) Comme $\sum a_n$ converge, on sait que $a_n \to 0$

or (a_n) décroît, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geqslant 0$.

Il s'en suit que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant n\, a_{2n} \leqslant u_n$

de plus, la suite (a_n) étant à termes positifs, et $\sum a_n$ convergente

$\forall n \geqslant 1, \quad \displaystyle\sum_{p=n+1}^{2n} a_p \leqslant \sum_{p=n+1}^{+\infty} a_p = R_n$ (reste de la série $\sum a_n$)

ou bien on peut dire $u_n = A_{2n} - A_{n+1}$ or $A_n \to l$ donc $u_n \to 0$

ainsi $0 \leqslant n\, a_{2n} \leqslant u_n \leqslant R_n$

or $R_n \longrightarrow 0$ (puisque $\sum a_n$ converge) donc par encadrement,

$n\, a_{2n} \longrightarrow 0$.

c) Ainsi $2\,(n\, a_{2n}) \longrightarrow 0$ d'où $2n\, a_{2n} \longrightarrow 0$; de plus,

$\forall n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant (2n+1)\, a_{2n+1} \leqslant (2n+1)\, a_{2n}$ (car (a_n) décroît)

$= 2n\, a_{2n} + a_{2n}$

or $2n\, a_{2n} \longrightarrow 0$ et $a_{2n} \longrightarrow 0$ (car $a_n \to 0$)

donc $(2n+1)\, a_{2n} \longrightarrow 0$

par encadrement, $(2n+1)\, a_{2n+1} \longrightarrow 0$

Ainsi $n\, a_n \longrightarrow 0$

d) $b_n = n\,(a_n - a_{n+1}) = n\, a_n - n\, a_{n+1} = \big(n\, a_n - (n+1)\, a_{n+1}\big) + a_{n+1}$

or $\sum \big(n\, a_n - (n+1)\, a_{n+1}\big)$ est de même nature que $(n\, a_n)$ (lien suite - série)

$(n\, a_n)$ converge donc $\sum \big(n\, a_n - (n+1)\, a_{n+1}\big)$ converge aussi.

puis $\sum a_{n+1}$ converge (car $\sum a_n$ converge)

par somme $\sum b_n$ converge.

e) $B_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} \big(k\, a_k - (k+1)\, a_{k+1}\big) + \sum_{k=1}^{n} a_{k+1}$

$\underset{\text{(telescopage)}}{=} \displaystyle a_1 - (n+1)\, a_{n+1} + \sum_{k=2}^{n+1} a_k$

$= \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} a_k - (n+1)\, a_{n+1} \longrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$

ainsi $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} b_k = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$

4)

(a)

b)

Donc $U_n = e$ ... $= e$

4) On suppose que $\sum b_n$ converge et que (a_n) décroit vers 0

(a) Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$

on suppose $m \leq n$

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} k(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} (k a_k - (k+1)a_{k+1} + a_{k+1})$$

$$= a_1 - (n+1)a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a_{k+1}$$

(telescopage)

$$= \sum_{k=1}^{n+1} a_k - (n+1)a_{n+1} = A_n + a_{n+1} - (n+1)a_{n+1}$$

$$= A_n - n\, a_{n+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k - n\, a_{n+1}$$

$$= A_m + \sum_{k=m+1}^{n} a_k - n\, a_{n+1}$$

donc $B_n - A_m = \sum_{k=m+1}^{n} a_k - n\, a_{n+1}$

or $\forall k \in [\![m+1, n]\!]$, $a_k \geq a_{n+1}$ (car (a_n) décroît)

d'où $\sum_{k=m+1}^{n} a_k \geq (n-(m+1)+1)\, a_{n+1}$

$= (n-m)\, a_{n+1}$

donc $B_n - A_m \geq (n-m)\, a_{n+1} - n\, a_{n+1} = -m\, a_{n+1}$

ainsi $B_n \geq A_m - m\, a_{n+1}$

b) On fixe $m \in \mathbb{N}^*$

on a $\forall n \geq m$ $A_m \leq B_n + m\, a_{n+1}$

or $\sum b_n$ converge donc (B_n) converge

et $(m\, a_{n+1})_n$ tend vers 0 (quand $n \to +\infty$)

donc en faisant $n \to +\infty$. $A_m \leq l$ où $l = \lim_{n \to +\infty} B_n$

donc (A_m) est majorée

or (A_m) est croissante (car (a_n) est positive)

ainsi (A_n) converge ; donc $\sum a_n$ converge.

c) On a seulement : $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $A_m \leq l$

d'où $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$

mais on n'a pas l'inégalité inverse.