Cap ECL DS n° 10 PROBABILITES

Exercice 1 : Soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose $k \geqslant 2$

1) $S_1(n) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ $\quad S_2(n) = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour tout $n \geqslant 2$.

2) $E(X_1) = \frac{n+1}{2}$ car $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$

$V(X_1) = \mathbb{E}(X_1^2) - (\mathbb{E}(X_1))^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 \, \mathbb{P}(X_1 = i) - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$

$= \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{1}{n} \, n \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = (n+1)\left[\frac{2n+1}{6} - \frac{n+1}{4}\right]$

$= (n+1)\left[\frac{8n+4-6n-6}{24}\right] = (n+1)\left(\frac{2n-2}{24}\right) = \frac{(n+1)(n-1)}{12}$ (question de cours)

3) $\frac{S_k(n)}{n^{k+1}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} i^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^k$

on pose $f : \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^k \end{array}$

f est continue sur $[0,1]$ et avec la subdivision régulière $x_i = \frac{i}{n}$ pour i allant de 1 à n

$R_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^k \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 f = \int_0^1 x^k \, dx = \frac{1}{k+1}$

4) Soit X une v.a telle que $X(\Omega) = \{1, \dots, n\}$

a) Soit $i \in \mathbb{N}^*$

$P(X = i) = P(X \geqslant i) - P(X \geqslant i+1)$ car $\underbrace{(X = i) \cup (X \geqslant i+1)}_{\text{union disjointe}} = (X \geqslant i)$

b) $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} i \, \mathbb{P}(X = i) = \sum_{i=1}^{n} i \left(\mathbb{P}(X \geqslant i) - \mathbb{P}(X \geqslant i+1)\right)$

$= \sum_{i=1}^{n} \left(((i-1)+1) \, \mathbb{P}(X \geqslant i) - i \, \mathbb{P}(X \geqslant i+1)\right)$

$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left((i-1) \, \mathbb{P}(X \geqslant i) - i \, \mathbb{P}(X \geqslant i+1)\right)}_{\text{somme telescopique}} + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X \geqslant i)$

$= 0 - n \underbrace{\mathbb{P}(X \geqslant n+1)}_{\overset{\shortparallel}{0} \text{ car } X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket} + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X \geqslant i)$

5) a) Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ $\quad U_k = \mathrm{Min}(X_1, \dots, X_k)$ $\quad X_i \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$

$\mathbb{P}(U_k \geqslant i) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} (X_j \geqslant i)\right)$

$= \prod_{j=1}^{k} \mathbb{P}(X_j \geqslant i) = \prod_{j=1}^{k} (1 - \mathbb{P}(X_j \leqslant i-1))$ (les X_j sont indépendantes)

$= \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) = \prod_{j=1}^{k} \underbrace{\left(\frac{n-i+1}{n}\right)}_{\text{indépendant de } j} = \left(\frac{n-i+1}{n}\right)^k$

b) $\mathbb{E}(U_k) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(U_k \geqslant i)$ d'après la question 4) b) puisque U_k est une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, \dots, n\}$

$\frac{1}{n}\mathbb{E}(U_k) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{n-i+1}{n}\right)^k = \frac{1}{n^k} \sum_{i=1}^{n} (n+1-i)^k = \frac{1}{n^k} \sum_{j=1}^{n} j^k = \frac{S_k(n)}{n^k}$

(on pose $j = n+1-i$)

c) avec le 3) $\xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{k+1}$ donc $\mathbb{E}(U_k) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n}{k+1}$

4) c) $\mathbb{E}($

6) $\mathbb{E}(U_k$

7) $V(U_k$

or on

donc

donc V

4) c) $\mathbb{E}(X^2) = \sum_{i=1} i^2\, \mathbb{P}(X=i) = \sum_{i=1} i^2 \left(\mathbb{P}(X \geq i) - \mathbb{P}(X \geq i+1) \right)$

$$= \sum_{i=1}^{n} i^2\, \mathbb{P}(X \geq i) - \sum_{i=1}^{n} i^2\, \mathbb{P}(X \geq i+1) \qquad j = i+1 \iff i = j-1$$

$$= \sum_{i=1}^{n} i^2\, \mathbb{P}(X \geq i) - \sum_{j=2}^{n+1} (j-1)^2\, \mathbb{P}(X \geq j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} i^2\, \mathbb{P}(X \geq i) - \sum_{i=2}^{n+1} (i^2 + 1 - 2i)\, \mathbb{P}(X \geq i)$$

$$= \mathbb{P}(X \geq 1) + \sum_{i=2}^{n} i^2\, \mathbb{P}(X \geq i) - \sum_{i=2}^{n} i^2\, \mathbb{P}(X \geq i) - \sum_{i=2}^{n+1} (1-2i)\, \mathbb{P}(X \geq i)$$

$$= \underbrace{\mathbb{P}(X \geq 1)}_{= (2\times 1 - 1)\mathbb{P}(X \geq 1)} + \sum_{i=2}^{n} (2i-1)\, \mathbb{P}(X \geq i) - (1 - 2(n+1)) \underbrace{\mathbb{P}(X \geq n+1)}_{=0}$$

car $X(\Omega) \subseteq [\![0, n]\!]$

$$= \sum_{i=1}^{n} (2i-1)\, \mathbb{P}(X \geq i)$$

6) $\mathbb{E}(U_k^2) =$ (avec le 4) c)) $\sum_{i=1}^{n} (2i-1)\, \mathbb{P}(U_k \geq i)$

$$= \sum_{i=1}^{n} (2i-1) \left(\frac{n-i+1}{n} \right)^k = \frac{1}{n^k} \sum_{i=1}^{n} (2i-1)(n+1-i)^k$$

$$= \frac{1}{n^k} \sum_{i'=1}^{n} (2(n+1-i') - 1)(i')^k = \frac{1}{n^k} \sum_{i=1}^{n} (2n+2-2i-1)\, i^k$$

$i' = n+1-i \iff i = n+1-i'$

$$= \frac{1}{n^k} \sum_{i=1}^{n} (2n+1)\, i^k - \frac{1}{n^k}\, 2 \sum_{i=1}^{n} i^{k+1}$$

$$= \boxed{(2n+1) \frac{S_k(n)}{n^k} - 2 \frac{S_{k+1}(n)}{n^k}}$$

7) $V(U_k) = \mathbb{E}(U_k^2) - (\mathbb{E}(U_k))^2$

$$= (2n+1) \frac{S_k(n)}{n^k} - 2 \frac{S_{k+1}(n)}{n^k} - \left(\frac{S_k(n)}{n^k} \right)^2$$

or on a vu que $\boxed{\frac{S_k(n)}{n^k} \sim \frac{n}{k+1}}$ d'où $\boxed{\frac{S_{k+1}(n)}{n^{k+1}} \sim \frac{n}{k+2}}$ (on remplace k par $k+1$ dans l'équivalent)

donc $\boxed{(2n+1) \frac{S_k(n)}{n^k} \sim \frac{2n^2}{k+1}}$ (car $2n+1 \sim 2n$) $\boxed{\frac{S_{k+1}(n)}{n^k} \sim \frac{n^2}{k+2}}$ et enfin $\left(\frac{S_k(n)}{n^k} \right)^2 \sim \frac{n^2}{(k+1)^2}$

donc $V(U_k) = \frac{2n^2}{k+1} + o(n^2) - 2\frac{n^2}{k+2} + o(n^2) - \frac{n^2}{(k+1)^2} + o(n^2)$

$$= \frac{2n^2(k+1)(k+2) - 2n^2(k+1)^2 - n^2(k+2)}{(k+1)^2(k+2)} + o(n^2)$$

$$= \frac{2n^2(k^2+3k+2) - 2n^2(k^2+2k+1) - n^2(k+2)}{(k+1)^2(k+2)} + o(n^2)$$

$$= \frac{n^2(2k^2 + 6k + 4 - 2k^2 - 4k - 2 - k - 2)}{(k+1)^2(k+2)} + o(n^2)$$

$$= \frac{n^2 (k)}{(k+1)^2 (k+2)} + o(n^2)$$

d'où $V(U_k) \sim \frac{k\, n^2}{(k+1)^2(k+2)}$

Exercice 2

1) Soit $N \in \{2,\dots,100\}$ X_N est le nombre de changements au cours des N premiers lancers ; il ne peut y en avoir un au premier lancer donc il y en a au plus $N-1$. Ainsi $X_N(\Omega) = [\![0, N-1]\!]$ 2

On pose A_k : " on obtient Pile au $k$ième lancer "

2) $\forall (i_1<i_2<\dots<i_k) \in [\![1,100]\!]^k$ $\mathbb{P}(A_{i_1}\cap A_{i_2}\dots\cap A_{i_k}) = \prod_{j=1}^{k} \mathbb{P}(A_{i_j})$ et ceci pour tout $k \leqslant 100$ 1

3) $X_2(\Omega) = [\![0,1]\!]$

$\mathbb{P}(X_2=0) = \mathbb{P}(A_1\cap A_2) + \mathbb{P}(\bar{A_1}\cap\bar{A_2})$

$\underset{\text{(Lancers indépendant)}}{=} p^2 + (1-p)^2 = p^2+1+p^2-2p = 2p^2-2p+1$

$= 2p(p-1)+1 = 1-2p(1-p)$

$\mathbb{P}(X_2=1) = \mathbb{P}(A_1\cap\bar{A_2}) + \mathbb{P}(\bar{A_1}\cap A_2) \overset{A_1 \perp\!\!\!\perp A_2}{=} P(A_1)P(\bar{A_2}) + P(\bar{A_1})P(A_2)$

$= p(1-p) + (1-p)p = 2p(1-p)$

$X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(2p(1-p))$

$\mathbb{E}(X_2) = 2p(1-p)$

4) $\mathbb{P}(X_3=0) = \mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap A_3) + \mathbb{P}(\bar{A_1}\cap\bar{A_2}\cap\bar{A_3}) \overset{(A_k)\perp\!\!\!\perp}{=} p^3 + (1-p)^3$

$\mathbb{P}(X_3=2) = \mathbb{P}(A_1\cap\bar{A_2}\cap A_3) + \mathbb{P}(\bar{A_1}\cap A_2\cap\bar{A_3}) = p^2(1-p) + (1-p)^2p = p(1-p)[p+1-p]$

$= p(1-p)$

$\mathbb{P}(X_3=1) = 1 - \mathbb{P}(X_3=0) - \mathbb{P}(X_3=2) = 1 - p^3 - (1-p)^3 - p(1-p)$

5) Soit $N\in\{2,\dots,100\}$ $\mathbb{P}(X_N=0) = \mathbb{P}(A_1\cap A_2\dots\cap A_N) + \mathbb{P}(\bar{A_1}\cap\bar{A_2}\dots\cap\bar{A_N}) = p^N + (1-p)^N$

6) $Y_k = X_k - X_{k-1}$ pour tout $k\in\{3,\dots,100\}$

puis $Y_2 = X_2$

a) Pour $k\in\{3,\dots,100\}$

donc $Y_k(\Omega) = [\![0,1]\!]$ car il ne peut y avoir qu'un changement au plus entre le $k-1$ième lancer et le $k$ième lancer.

$(X_{k-1}=i)_{0\leq i\leq k-2}$ forme une partition de l'univers.

$\mathbb{P}(Y_k=1) = \mathbb{P}(X_k - X_{k-1} = 1) \overset{FPT}{=} \sum_{i=0}^{k-2} \mathbb{P}(X_{k-1}=i)\, \underbrace{\mathbb{P}_{(X_{k-1}=i)}(X_k=i+1)}_{\mathbb{P}(A_{k-1}\cap\bar{A_k}) + \mathbb{P}(\bar{A_{k-1}}\cap A_k) = 2p(1-p)}$

donc $\mathbb{P}(Y_k=1) = 2p(1-p)\sum_{i=0}^{k-2}\mathbb{P}(X_{k-1}=i)$

$= 2p(1-p)$ ainsi $Y_k \hookrightarrow \mathcal{B}(2p(1-p))$

Puis $Y_2 = X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(2p(1-p))$

6) b) Soit $N\in\{2,\dots,100\}$

$X_N = ((X_3-X_2) + (X_4-X_3) + (X_5-X_4)\dots + (X_N - X_{N-1})) + X_2 = Y_3 + Y_4 \dots + Y_N + Y_2$

$Y_2 + Y_3 \dots + Y_N = X_N$

donc

$\mathbb{E}(X_N) = \sum_{k=2}^{N}\mathbb{E}(Y_k)$ (linéarité de l'espérance) donc $\mathbb{E}(X_N) = (N-1)\mathbb{E}(X_2) = (N-1)2p(1-p)$

7) Soit $k\in\{3,\dots,99\}$.

$\mathbb{P}((Y_k=1)\cap(Y_{k+1}=1)) = \mathbb{P}(A_{k-1}\cap\bar{A_k}\cap A_{k+1}) + \mathbb{P}(\bar{A_{k-1}}\cap A_k\cap\bar{A_{k+1}})$

$\underset{\text{car }(A_k)\perp\!\!\!\perp}{=} p^2(1-p) + (1-p)^2p = p(1-p)(p+1-p)$

$= p(1-p)$

Ainsi

On $P($

b) On

On

Ainsi $P\left((Y_k=1) \cap (Y_{k+1}=1) \right) = p(1-p)$

On $P(Y_k=1)\,P(Y_{k+1}=1) = P(X_2=1)\,P(X_2=1) = (2p(1-p))^2$

or $p(1-p) = (2p(1-p))^2$

$\iff p(1-p) = 4p^2(1-p)^2$

$\iff$ ($p \in]0,1[\Rightarrow p \neq 0,\ 1-p \neq 0$) $1 = 4p(1-p) \iff 1 = 4p - 4p^2$

$\iff 4p^2 - 4p + 1 = 0$

$\iff (2p-1) = 0 \iff p = \frac{1}{2}$

Ainsi si $p \neq \frac{1}{2}$ Y_k et Y_{k+1} ne sont PAS indépendantes.

si $p = \frac{1}{2}$, les Y_k sont indépendantes

b) On admet que,

On $X_N = \sum_{k=2}^{N} Y_k$

or $\forall k \in [\![2, N]\!]$ $Y_k \hookrightarrow \mathcal{B}(2p(1-p)) = \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$

Ainsi X_N est somme de $N-1$ v.a indépendantes suivant une loi de Bernoulli !

Ainsi $X_N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(N-1, \frac{1}{2}\right)$