Laptell — DS 02 CORRIGE

Exercice 1

1) Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $x \in \mathbb{R}$

$ch\,x + sh\,x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^x$

donc $(ch\,x + sh\,x)^n = (e^x)^n = e^{nx}$

mais $ch(nx) + sh(nx) = \frac{e^{nx}+e^{-nx}}{2} + \frac{e^{nx}-e^{-nx}}{2} = e^{nx}$

donc $\underline{(ch\,x + sh\,x)^n = ch(nx) + sh(nx)}$

2) $c : [0, +\infty[\longrightarrow [1, +\infty[$
$x \longmapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Soit $y \in [1, +\infty[$
on résout $c(x) = y$ sur $[0, +\infty[$

$\frac{e^x+e^{-x}}{2} = y \iff e^{2x} + 1 = 2y e^x$
$\iff (e^x)^2 - 2y(e^x) + 1 = 0$
avec $X = e^x$ $\quad \Delta = 4y^2 - 4 = 4(y^2-1)$

• $\boxed{\text{Si } y = 1}$ $\quad \Delta = 0$ et $c(x) = 1$
$\iff e^x = 1$
$\iff x = 0$

donc $\underline{0 \text{ unique antécédent de } 1 \text{ par } c}$

• $\boxed{\text{Si } y > 1}$ $\quad \Delta > 0 \quad X_1 = y - \sqrt{y^2-1} \quad X_2 = y + \sqrt{y^2-1}$

$c(x) = y \iff e^x = \frac{2y - \sqrt{4(y^2-1)}}{2} = y - \sqrt{y^2-1}$
ou
$e^x = y + \sqrt{y^2-1}$

or $y + \sqrt{y^2-1} > 0$ et comme le produit des racines $X_1X_2 = 1$
les racines sont de même signe (positif)

donc $c(x) = y \iff x = \ln(y - \sqrt{y^2-1})$ ou $x = \ln(y + \sqrt{y^2-1})$

Il reste à savoir si ces valeurs sont ou pas dans $]0, +\infty[$

$X_1X_2 = 1$ donc, si $X_2 > 1$ alors $X_1 = \frac{1}{X_2} < 1$
ce qui veut dire que, si $\ln X_1 > 0$ alors on aura $\ln X_2 < 0$ et il n'y aura qu'une et une seule solution (à savoir $\ln X_2$)

or $y > 1$ et $\sqrt{y^2-1} > 0$ donc $X_2 = y + \sqrt{y^2-1} > 1$

Finalement, $\underline{\text{si } y > 1}$ alors
$\underline{x = \ln(y + \sqrt{y^2-1})}$

3) $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 > x^2 \geq 0$ donc $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x|$ (car la fonction $X \mapsto \sqrt{X}$ est croissante strictement sur $\mathbb{R}_+$)

donc $\sqrt{x^2+1} + x > |x| + x \geq 0$
d'où $\sqrt{x^2+1} + x > 0$
ainsi $\ln(\sqrt{x^2+1} + x)$ existe.
donc $\underline{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$
Alors $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = \ln(\sqrt{(-x)^2+1} - x)$
$= \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$
$= \ln\left(\frac{(x^2+1) - x^2}{\sqrt{x^2+1} + x}\right)$
$= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}\right)$
$= -\ln(\sqrt{x^2+1} + x) = -f(x)$
et $\underline{f \text{ est impaire}}$

ex 1 3) c) Soit $x \in \mathbb{R}$

$f \circ sh(x) = \ln(\sqrt{sh^2(x) + 1} + sh\,x)$

or $ch^2 - sh^2 = 1$ donc $1 + sh^2(x) = ch^2(x)$
puis $ch \geq 1 > 0$ sur $\mathbb{R}$
donc $\sqrt{sh^2(x)+1} = \sqrt{ch^2(x)} = ch(x)$

ainsi $f \circ sh(x) = \ln(ch\,x + sh\,x)$ avec 1) et $n = 1$
$= \ln(e^x)$
$= x$

d) sh est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $sh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

$\sqrt{3} \in \mathbb{R}$ donc $\exists!\, x_0 \in \mathbb{R}$, $sh\,x_0 = \sqrt{3}$

e) On a $sh(x_0) = \sqrt{3}$
or avec 3) c), $f \circ sh(x_0) = x_0$
d'où $f(\sqrt{3}) = x_0$
c'est-à-dire $\ln(\sqrt{\sqrt{3}^2 + 1} + \sqrt{3}) = x_0$
d'où $\ln(\sqrt{4} + \sqrt{3}) = x_0$
ainsi $\boxed{x_0 = \ln(2 + \sqrt{3})}$

f) $ch^2(x) - sh^2(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

donc $ch(x) = 2 \iff ch^2(x) = 4$ (car $ch > 0$ sur $\mathbb{R}$)
$\iff 1 + sh^2(x) = 4$
$\iff sh^2(x) = 3$
$\iff sh(x) = \sqrt{3}$ ou $sh(x) = -\sqrt{3}$
$\iff x = x_0$ ou $sh(-x) = \sqrt{3}$ (sh impaire)

$\boxed{ch\,x = 2} \iff \boxed{x = x_0 \text{ ou } x = -x_0}$.

4) a) Soit $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 1$ et soit $n \in \mathbb{N}$

$\varphi_0(x) = \frac{1+1}{2} = 1 \qquad \varphi_1(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2-1}) + (x - \sqrt{x^2-1})}{2} = x$

$\varphi_2(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2-1})^2 + (x - \sqrt{x^2-1})^2}{2} = \frac{x^2 + x^2 - 1 + 2x\sqrt{x^2-1} + x^2 + x^2 - 1 - 2x\sqrt{x^2-1}}{2}$

$\varphi_2(x) = \frac{4x^2 - 2}{2} = 2x^2 - 1$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

Alors $ch\,x \geq 1$ et $\varphi_n(ch(x)) = \frac{(ch\,x + \sqrt{ch^2x - 1})^n + (ch\,x - \sqrt{ch^2 x - 1})^n}{2}$

$ch^2 x - 1 = sh^2 x$ et $\sqrt{sh^2 x} = |sh\,x|$

$= \frac{(ch\,x + |sh\,x|)^n + (ch\,x - |sh\,x|)^n}{2}$

Si $x \geq 0$ $\quad |sh\,x| = sh\,x$

et $\varphi_n(ch\,x) = \frac{1}{2}[(ch\,x + sh\,x)^n + (ch\,x - sh\,x)^n]$
$= \frac{1}{2}[(e^x)^n + (e^{-x})^n]$
$= \frac{1}{2}(e^{nx} + e^{-nx})$
$= ch(nx)$

Si $x \leq 0$ $\quad |sh\,x| = -sh\,x$ (car $sh\,x \leq 0$)
et de même $\varphi_n(ch\,x) = ch(nx)$

donc $\underline{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(ch\,x) = ch(nx)}$

On $\forall x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1$

$\varphi_n(-x) = \frac{(-x + \sqrt{x^2-1})^n + (-x - \sqrt{x^2-1})^n}{2} = \frac{(-1)^n(x - \sqrt{x^2-1})^n + (-1)^n(x + \sqrt{x^2-1})^n}{2}$

$= (-1)^n \varphi_n(x)$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad \varphi_n(-ch\,x) = (-1)^n \varphi_n(ch\,x)$
$= (-1)^n ch(nx)$

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \ldots$

Exercice 2

$$h : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x} \end{cases}$$

1) h est derivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $h'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

donc $\forall x > 0$, $h'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$

$= \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$

or $x^2 > 0$ donc $h'(x)$ est du signe de x^2, sur $\mathbb{R}_+^*$

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
Vh	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $h(x) \geq 2$ d'après ce tableau donc 1 n'est pas atteint par h et h n'est pas surjective.

$h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 2 = h(2)$ or $2 \neq \frac{1}{2}$ donc h n'est pas injective.

2) a) Soit $z = re^{i\theta}$ ($r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$)

$f(z) = z + \frac{1}{\bar{z}} = re^{i\theta} + \frac{1}{re^{-i\theta}}$

$= re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{i\theta} = \left(r + \frac{1}{r}\right)e^{i\theta}$

$= \frac{r^2+1}{r}e^{i\theta} = \boxed{h(r)\, e^{i\theta}}$

b) $f(z) = i \iff h(r)e^{i\theta} = e^{i\pi/2}$

$\underset{(h(r) \geq 2 > 0)}{\iff} \begin{cases} h(r) = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$) impossible avec 1)

donc i n'est pas atteint par f

c) $f(z) = 1 + i\sqrt{3} \iff h(r)e^{\ldots} = 2e^{\ldots}$

$\iff \begin{cases} h(r) = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$ (avec 1) $\iff \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$

$\iff z = e^{i\pi/3}$

d) $f(z) = \frac{5}{2}i \iff h(r)e^{i\theta} = \frac{5}{2}e^{i\pi/2} \iff \begin{cases} h(r) = \frac{5}{2} \\ \theta = \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$

$\iff \begin{cases} r = 2 \text{ ou } r = 1/2 \\ \theta = \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases} \iff z = 2i$ ou $z = \frac{i}{2}$

e) $f(2i) = f\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{5}{2}i$ or $2i \neq \frac{i}{2}$ donc f non injective.

i non atteint par f donc f non surjective.

3) $z = re^{i\theta} \in f^{-1}(B) \iff f(z) \in B \iff |f(z)| = \frac{1}{2} \iff h(r) = 1/2$) impossible $f^{-1}(B) = \emptyset$

4) a) $E = \{ z \in \mathbb{C},\ |z| \geq 1 \}$ $F = \{ z \in \mathbb{C},\ |z| \geq 2 \}$

Soit $z \in E$ alors $z = re^{i\theta}$ avec $r \geq 1$

$f(z) = h(r)e^{i\theta}$

or, pour $r \geq 1$ on a, d'après l'étude de h au 1), $h(r) \geq 2$

donc $f(z) \in F$. Ainsi $f(E) \subseteq F$

b) Soit $a \in F$ avec $r_a \geq 2$ et $\theta_a \in \mathbb{R}$

$a = r_a e^{i\theta_a}$

$f(z) = a \iff h(r)e^{i\theta} = r_a e^{i\theta_a}$

$\iff \begin{cases} h(r) = r_a \\ \theta = \theta_a\ [2\pi] \end{cases}$

D'après le 1), l'équation $h(r) = r_a$ (avec $r_a \geq 2$) admet deux solutions u et v ; $u \in]0, 1]$, $v \in [1, +\infty[$

donc $f(z) = a$ admet une et une seule solution dans E