Cap ECL (23-24) DS03

Exercice 1

(P) : $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable et $\forall x \in]0,+\infty[, \quad f\left(\frac{1}{4x}\right) = f'(x)$

1) Préambule :

(a) $\alpha : x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\alpha'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Soit $x>0$, $\alpha\left(\frac{1}{4x}\right) = \sqrt{\frac{1}{4x}} = \frac{1}{\sqrt{4x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \alpha'(x)$

donc α vérifie (P)

(b) (F) : $4y'' - 4y' + y = 0$

(C) : $4r^2 - 4r + 1 = 0 \quad \Delta = 16-16 = 0 \quad x_0 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

donc $y(t) = (At+B)e^{\frac{1}{2}t}, \quad (A,B)\in\mathbb{R}^2$

2) Analyse : Si f est une solution de (P)

(a) Alors $\forall x>0 \quad f'(x) = f\left(\frac{1}{4x}\right)$ or $x\longmapsto \frac{1}{4x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$; or f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc f' l'est aussi.

(b) On a : $\forall x>0 \quad f'(x) = f\left(\frac{1}{4x}\right)$ donc $f''(x) = \left(\frac{1}{4x}\right)' f'\left(\frac{1}{4x}\right)$

ainsi $f''(x) = -\frac{4}{(4x)^2} f'\left(\frac{1}{4x}\right) = -\frac{1}{4x^2} f'\left(\frac{1}{4x}\right)$

Mais $\forall t>0 \quad f\left(\frac{1}{4t}\right) = f'(t)$ donc, avec $x>0$ et $t = \frac{1}{4x}>0$

il vient $f'\left(\frac{1}{4x}\right) = f(x)$ d'où $f''(x) = -\frac{1}{4x^2}f(x)$

donc f vérifie $\boxed{(E) : y''(x) + \frac{1}{4x^2}y(x) = 0, \quad \forall x>0}$

(c) Soit $g : \begin{array}{l}\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\\ t\longmapsto f(e^t)\end{array}$ $\quad g'(t) = e^t f'(e^t)$

$g''(t) = e^t f'(e^t) + (e^t)^2 f''(e^t)$

Soit $t\in\mathbb{R}$, $4g''(t) - 4g'(t) + g(t) = 4\left(e^t f'(e^t) + e^{2t}f''(e^t)\right) - 4e^t f'(e^t) + f(e^t)$
$= 4e^{2t}f''(e^t) + f(e^t)$

or $e^t>0$ donc, d'après (b), $f''(e^t) = -\frac{1}{4e^{2t}}f(e^t)$

d'où $4g''(t) - 4g'(t) + g(t) = 4e^{2t}\left(\frac{-1}{4e^{2t}}f(e^t)\right) + f(e^t) = 0$

donc g vérifie (F)

(d) Ainsi, $\forall t\in\mathbb{R}, \quad g(t) = (At+B)e^{\frac{1}{2}t}, \quad (A,B)\in\mathbb{R}^2$ (d'après (b))

or $g(t) = f(e^t)$ donc $f(x) = g(\ln x), \quad \forall x>0$

d'où $f(x) = (A\ln x + B)e^{\frac{1}{2}\ln x} = (A\ln x + B)\sqrt{x}$

avec A, B constantes réelles.

3) Synthèse : Réciproquement si on pose $f(x) = (A\ln x + B)\sqrt{x}$ avec $(A,B)\in\mathbb{R}^2$

Alors f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f'(x) = \frac{A}{x}\sqrt{x} + A\ln x\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{B}{2\sqrt{x}}$

c'est-à-dire $f'(x) = A\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right) + \frac{B}{2\sqrt{x}}$

Ainsi, f vérifie (P) $\iff \forall x>0, \quad f\left(\frac{1}{4x}\right) = f'(x) \iff \forall x>0 \quad \left(A\ln\frac{1}{4x} + B\right)\sqrt{\frac{1}{4x}} = A\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right) + \frac{B}{2\sqrt{x}}$

$\iff \forall x>0 \quad -A\frac{\ln 4x}{2\sqrt{x}} + \frac{B}{2\sqrt{x}} = A\left(\frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}\right) + \frac{B}{2\sqrt{x}}$

$\iff \forall x>0 \quad A\left(-\ln 4x - 2 - \ln x\right) = 0$

$\iff \forall x>0 \quad A\left(-\ln 4 - 2 - 2\ln x\right) = 0$ $\Big\}$ pour $x=1$ $-\ln 4 - 2 \neq 0$

$\iff A = 0$

Donc $\boxed{\mathcal{S} = \{x\longmapsto B\sqrt{x}, \quad B\in\mathbb{R}\}}$

Exercice 2

$f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$

1) Arctan est définie sur $\mathbb{R}$ et $x\longmapsto\sqrt{x}$ sur $[0,+\infty[$ donc :

$x\in D_f \iff 1-x^2\geq 0$ et $x\neq 0$ (car $x\mapsto\frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$)

$\iff x\in[-1,1]$ et $x\neq 0$

Donc $D_f = [-1,1]\setminus\{0\}$

2) $\forall x\in D_f$, $-x\in D_f$ et $f(-x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{1-(-x)^2}}{-x}\right) = \operatorname{Arctan}\left(-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$
$= -\operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$ } Arctan impaire
$= -f(x)$

donc f est impaire

3) Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, mais $X\longmapsto\sqrt{X}$ n'est dérivable que sur $]0,+\infty[$

donc : $x\in\Delta_f \iff 1-x^2>0$ et $x\neq 0$
$\iff x\in]-1,1[$ et $x\neq 0$

$\Delta_f =]-1,1[\setminus\{0\}$

$\forall x\in\Delta_f, \quad f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^2}\times\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)'$

$= \frac{1}{1+\frac{1-x^2}{x^2}}\times\left(-\frac{1}{x^2}\sqrt{1-x^2} - \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}\times\frac{1}{x}\right)$

$= \frac{x^2}{x^2+1-x^2}\times\left(-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = x^2\left(\frac{-(1-x^2)-x^2}{x^2\sqrt{1-x^2}}\right)$

$= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos'(x)$

4) a) $\forall x\in]0,1[, \quad f'(x) = \arccos'(x)$ donc $\exists C_1\in\mathbb{R}, \forall x\in]0,1[, f(x) = C_1 + \arccos(x)$

or $f\left(\frac{1}{2}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}{\frac{1}{2}}\right) = \arctan\left(2\sqrt{\frac{3}{4}}\right) = \arctan(\sqrt{3})$

or $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin\pi/3}{\cos\pi/3} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$ donc $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$

donc $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ donc $C_1 + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ d'où $C_1 = 0$

mais $C_1 + \arccos\frac{1}{2} = C_1 + \frac{\pi}{3}$

Ainsi, $\forall x\in]0,1[\quad f(x) = \arccos(x)$

de plus $f(1) = \arctan 0 = 0 = \arccos(1)$ donc $\forall x\in]0,1]$,

$f(x) = \arccos(x)$

b) Soit $x\in[-1,0[$ alors $-x\in]0,1]$

donc (avec 4) a)), $f(-x) = \arccos(-x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(-x)$

car $\forall x\in[-1,1]$, $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$

$= \frac{\pi}{2} + \arcsin(x)$ (car arcsin est impaire)

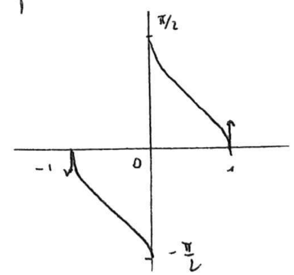
donc $f(-x) = \frac{\pi}{2} + \arcsin(x)$

mais f est impaire, d'où $f(x) = -f(-x) = -\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$

$= -\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right)$

$f(x) = -\pi + \arccos x$

(c)



(d) Soit $x\in D_f = [-1,1]\setminus\{0\}$

$f(x) = \frac{\pi}{3} \iff \arccos x = \frac{\pi}{3}$ (car il n'y a pas de solution sur $[-1,0[$ d'après le graphe)

$\iff \cos(\arccos x) = \cos\frac{\pi}{3}$ (car $\arccos x\in[0,\pi]$ et $\frac{\pi}{3}\in[0,\pi]$)

$\iff x = \frac{1}{2}$

sont appréciables.

Exercice 3

(E) : $x^2 y''(x) - x y'(x) + y(x) = \ln x$, $\forall x \in I = \mathbb{R}_+^*$

on pose $z(x) = x y'(x) - y(x)$ où $y : I \to \mathbb{R}$ est deux fois dérivable

1) $z'(x) = y'(x) + x y''(x) - y'(x) = x y''(x)$

z vérifie (F) : $x z'(x) - z(x) = \ln x$, $\forall x \in I$ $\iff$ $x y''(x) - x y'(x) + y(x) = \ln x$, $\forall x \in I$

$\iff$ y vérifie (E)

(car $x \neq 0$ sur I)

2) (H) : $x z'(x) - z(x) = 0 \iff z'(x) = \frac{1}{x} z(x)$, $\forall x \in I$

$a(x) = \frac{1}{x}$, $A(x) = \ln|x| = \ln x$ (car $x > 0$)

donc $z_H(x) = C e^{\ln x} = Cx$, $C \in \mathbb{R}$

3) $g : x \longmapsto \frac{\ln x}{x^2}$

Une primitive G de g sur I s'écrit $G(x) = \int^x \frac{\ln t}{t^2} dt$

Par IPP : on pose $u'(t) = \frac{1}{t^2}$ $u(t) = -\frac{1}{t}$ u, v sont $\mathcal{C}^1$ sur I

$v(t) = \ln t$ $v'(t) = \frac{1}{t}$

$G(x) = \left[-\frac{\ln t}{t}\right]^x - \int^x -\frac{1}{t} \times \frac{1}{t} dt = -\frac{\ln x}{x} + \int^x \frac{1}{t^2} dt$

$= -\frac{\ln x}{x} + \left[-\frac{1}{t}\right]^x = -\frac{\ln x}{x} + -\frac{1}{x} = -\frac{\ln x + 1}{x}$

4) Par variation de la constante : on pose $f(x) = \lambda(x) x$ où

$\lambda : I \to \mathbb{R}$ est dérivable

f vérifie (F) $\iff$ $\forall x \in I$, $x f'(x) - f(x) = \ln x$

$\iff$ $\forall x \in I$, $x(\lambda'(x)x + \lambda(x)) - \lambda(x)x = \ln x$

$\iff$ $\forall x \in I$, $x^2 \lambda'(x) = \ln(x)$ $\iff$ $\forall x \in I$, $\lambda'(x) = \frac{\ln x}{x^2} = g(x)$

on peut prendre, $\lambda(x) = G(x) = -\frac{\ln x + 1}{x}$

d'où $f(x) = -\ln x - 1$

Donc $\mathcal{S}_{(F)} = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto Cx - \ln x - 1 \end{array} , \quad C \in \mathbb{R} \right\}$

5) D'après le 1) on a :

y vérifie (E) $\iff$ z vérifie (F)

$\iff$ $\exists C \in \mathbb{R}$, $\forall x > 0$ $z(x) = Cx - \ln x - 1$

$\iff$ $\exists C \in \mathbb{R}$, $\forall x > 0$ $x y'(x) - y(x) = Cx - \ln x - 1$ ($\heartsuit$)

on a vu que $y_H(x) = Bx$, $B \in \mathbb{R}$

. f est solution de (F) : $x y'(x) - y(x) = \ln x$

. $x \longmapsto 1$ est solution (évidente) de : $x y'(x) - y(x) = -1$

. posons $l(x) = K(x)x$ avec K dérivable sur I

l vérifie $x y'(x) - y(x) = Cx$ $\iff$ $x(K'(x)x + K(x)) - xK(x) = Cx$, $\forall x > 0$

$\iff$ $x^2 K'(x) = Cx$, $\forall x > 0$

$\iff$ $K'(x) = \frac{C}{x}$, $\forall x > 0$

on peut prendre $K(x) = C\ln|x| = C\ln x$ d'où $l(x) = Cx\ln x$

Ainsi $x \longmapsto -f(x) + 1 + Cx\ln x$ est SP de ($\heartsuit$) (par superposition !)

D'où y vérifie ($\heartsuit$) $\iff$ $y(x) = Bx - f(x) + 1 + Cx\ln x$, $(B,C) \in \mathbb{R}^2$

$\iff$ $y(x) = Bx + \ln(x) + 2 + Cx\ln x$, $(B,C) \in \mathbb{R}^2$