Cap ECL (23-24) DS 04 CORRIGE

Exercice 1

Partie 1 :

1) On sait que $\forall x > -1,\quad \ln(1+x) \leq x$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x = \frac{1}{n+1} > -1$ donc $\ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1}$

d'où $\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1}$

donc $\ln(n+2) - \ln(n+1) \leq \frac{1}{n+1}$

Puis $x' = -\frac{1}{n+1} > -1$ (car $1 > \frac{1}{n+1}$ pour $n \geq 1$)

donc $\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq -\frac{1}{n+1}$

ainsi $\ln\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right) \leq -\frac{1}{n+1}$, ainsi $\ln(n) - \ln(n+1) \leq -\frac{1}{n+1}$

d'où $\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \leq -\frac{1}{n+1}$,

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = H_n - \ln(n+1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$

$b_n = H_n - \ln(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; $a_{n+1} - a_n = H_{n+1} - \ln(n+2) - H_n + \ln(n+1)$

$= H_{n+1} - H_n + \ln(n+1) - \ln(n+2)$

$= \frac{1}{n+1} + \ln(n+1) - \ln(n+2) \geq 0$ (d'après le 1))

donc (a_n) est croissante.

$b_{n+1} - b_n = H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n + \ln(n) = \frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1) \leq 0$ (d'après le 1))

donc (b_n) est décroissante.

$b_n - a_n = (H_n - \ln n) - (H_n - \ln(n+1)) = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

or $1 + \frac{1}{n} \longrightarrow 1$ et $\ln X \underset{X \to 1}{\longrightarrow} 0$ donc $b_n - a_n \longrightarrow 0$

Ainsi a et b sont des suites adjacentes.

Il s'en suit qu'elles convergent vers un même nombre réel γ.

3) On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \leq \gamma \leq b_n$ (car (a_n) et (b_n) sont adjacentes)

donc, en particulier, $a_1 \leq \gamma \leq b_1$

or $a_1 = 1 - \ln 2$ et $b_1 = 1$ d'où $1 - \ln 2 \leq \gamma \leq 1$

4) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = a_n + \ln(n+1)$

On $a_n \to \gamma$ et $\ln(n+1) \longrightarrow +\infty$, par somme, $H_n \longrightarrow +\infty$.

Partie 2 : $A_n = \sum_{k=1} \frac{(-1)}{k}$

5) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $K_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$K_{n+1} - K_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

$= \sum_{\substack{k'=2 \\ k'=k+1}}^{n+2} \frac{1}{n+k'} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+(n+1)} + \frac{1}{n+(n+2)} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n+k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+1}$

$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{n+1}$

$= \frac{(2n+2) - (2n+1)}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$

donc (K_n) est croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$\forall k \in [\![1, n]\!]$ $\frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n+1}$

donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = H_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}(n) = \frac{n}{n+1} \leq 1$

(H_n) est majorée par 1.

donc (H_n) converge vers un réel l.

b) Ainsi (H_n)

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}\right)$

donc $H_{2n} = H_n + K_n$

ainsi $K_n = H_{2n} - H_n$

Puis $b_{2n} = H_{2n} - \ln(2n)$ et $b_n = H_n - \ln(n)$

$H_{2n} = b_{2n} + \ln(2n)$ et $H_n = b_n + \ln(n)$

ainsi $K_n = b_{2n} + \ln(2n) - b_n - \ln(n) = b_{2n} - b_n + \ln\frac{2n}{n}$

d'où $K_n = b_{2n} - b_n + \ln 2$

d) $b_n \to \gamma$ donc $b_{2n} \longrightarrow \gamma$

ainsi par différence, $b_{2n} - b_n \longrightarrow 0$

puis par somme, $K_n \longrightarrow \ln 2$

6) a) Initialisation : $A_{2\times 1} = A_2 = \sum_{k=1}^{2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{(-1)^2}{1} + \frac{(-1)^3}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = K_1$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A_{2n} = K_n$

Alors $A_{2(n+1)} = A_{2n+2} = A_{2n} + \frac{(-1)^{(2n+1)+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{(2n+2)+1}}{2n+2}$

$\underset{(HR)}{=} K_n + \underbrace{\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}}$ Vu à 5) a)

$= K_n + (K_{n+1} - K_n)$

Donc, si, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A_{2n} = K_n$.

b) $A_{2n+2} - A_{2n+1} = \dfrac{(-1)^{(2n+2)+1}}{2n+2} = \dfrac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} = \dfrac{-1}{2n+2}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A_{2n+1} = A_{2n+2} + \dfrac{1}{2n+2}$

or $A_{2n} = K_n \longrightarrow \ln 2$

donc $A_{2n+2} \longrightarrow \ln 2$

puis $\dfrac{1}{2n+2} \longrightarrow 0$ donc par somme, $A_{2n+1} \longrightarrow \ln 2$

Mais alors on a $A_{2n} \to \ln 2$ et $A_{2n+1} \to \ln 2$

d'où $A_n \to \ln 2$.

Exercice 2

$\begin{cases} u_0 = e \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{1+\ln(u_n)} \end{cases}$ $\quad g : [1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{1+x}{1+\ln x}$

1) a) g est dérivable sur $[1,+\infty[$ (car $\forall x \geq 1$, $\ln x \geq 0$ donc $1+\ln x \geq 1 > 0$)

$$g'(x) = \frac{1(1+\ln x) - \frac{1}{x}(1+x)}{(1+\ln x)^2} = \frac{1+\ln x - \frac{1}{x} - 1}{(1+\ln x)^2} = \frac{x\ln x - 1}{x(1+\ln x)^2}$$

or $\forall x \in [1,+\infty[$, $x(1+\ln x)^2 > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de son numérateur $x\ln x - 1$.

Posons $h(x) = x\ln x - 1$.

h est dérivable sur $[1,+\infty[$ et $h'(x) = \ln x + \frac{1}{x}x$

$h'(x) = \ln x + 1 > 0$ $\forall x \geq 1$.

h est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$

$h(1) = -1 < 0$ et $\lim\limits_{+\infty} h = +\infty > 0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists!\, \alpha \in [1,+\infty[$, $h(\alpha) = 0$

donc, $\exists!\, \alpha \in [1,+\infty[$, $g'(\alpha) = 0$

De plus $h(\alpha) = 0 \iff \alpha\ln\alpha - 1 = 0 \iff \ln\alpha = \dfrac{1}{\alpha}$

b)

x	1		α		$+\infty$
Δh	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
Δg	2	$\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

le signe de $g'(x)$ est celui de $h(x)$

On $g(\alpha) = \dfrac{1+\alpha}{1+\ln\alpha} = \dfrac{1+\alpha}{1+\frac{1}{\alpha}} = \dfrac{1+\alpha}{\frac{\alpha+1}{\alpha}} = \alpha$

c) ainsi $g([\alpha,+\infty[) = [\alpha,+\infty[$ donc $[\alpha,+\infty[$ est stable par g

2) . $u_0 = e \in [\alpha,+\infty[$

en effet, $h(e) = e\ln e - 1 = e - 1 > 0 = h(\alpha)$

et h est strictement croissante sur $[1,+\infty[$ 1

donc : $h(e) > h(\alpha) \Rightarrow e > \alpha$

. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in [\alpha,+\infty[$ (stabilité)

Alors, comme $g([\alpha,+\infty[) \subseteq [\alpha,+\infty[$

on a $g(u_n) \in [\alpha,+\infty[$ 1

donc $u_{n+1} \in [\alpha,+\infty[$

Donc, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [\alpha,+\infty[$

Or g est croissante sur $[\alpha, +\infty[$ (1)

et $u_0 = e$ $\quad u_1 = g(e) = \dfrac{1+e}{1+\ln e} = \dfrac{1+e}{2} = \dfrac{e}{2} + \dfrac{1}{2} = e + \dfrac{1}{2} - \dfrac{e}{2}$

$= e + \underbrace{\dfrac{1-e}{2}}_{<0} < e$

donc $u_1 \leq u_0$

Si pour un entier n donné, $u_{n+1} \leq u_n$
alors par croissance de g sur $[\alpha, +\infty[$, on a $g(u_{n+1}) \leq g(u_n)$
d'où $u_{n+2} \leq u_{n+1}$ (1)

ainsi, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$
u est donc décroissante.

Ainsi u est décroissante et minorée par α, donc u converge vers un réel l tel que $l \geq \alpha$.

Mais alors, g étant continue sur $[\alpha, +\infty[$, on a $l = g(l)$ (1)

Or $g(\alpha) = \alpha$ (vu au 1) b))

Mais est-ce la seule possibilité ?

Soit $x \geq \alpha$ $\quad g(x) - x = \dfrac{1+x}{1+\ln x} - x = \dfrac{(1+x) - x(1+\ln x)}{1+\ln x}$

$= \dfrac{1 + x - x - x\ln x}{1+\ln x} = \dfrac{1 - x\ln x}{1+\ln x}$

$g(x) - x = 0 \iff 1 = x\ln x \iff h(x) = 0$

or on a vu que α est l'unique 0 de h sur $[1, +\infty[$ (1)

donc $g(x) - x = 0 \iff x = \alpha$

Ainsi $u_n \longrightarrow \alpha$

Exercice 3

1) Soit f une fonction définie sur $[0, 1]$ et vérifiant :

(P_1) $\forall x \in [0, 1]$, $2x - f(x) \in [0, 1]$

et (P_2) $\forall x \in [0, 1]$, $f(2x - f(x)) = x$

Soit $\alpha \in [0, 1]$. On pose $\begin{cases} v_0 = \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = 2v_n - f(v_n) \end{cases}$

a) . $v_0 = \alpha$ existe et $\alpha \in [0, 1]$

. S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que v_n existe et $v_n \in [0, 1]$

alors, d'après (P_1), $2v_n - f(v_n) \in [0, 1]$

donc v_{n+1} existe et $v_{n+1} \in [0, 1]$

. Ainsi, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, v_n existe et $v_n \in [0, 1]$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $\quad v_{n+2} = 2v_{n+1} - f(v_{n+1})$

$v_{n+2} = 2v_{n+1} - \underbrace{f(2v_n - f(v_n))}$ d'après (P_2) car $v_n \in [0, 1]$

$v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n$

(C) : $r^2 - 2r + 1 = 0 \iff (r-1)^2 = 0 \iff r = 1 = r_0$

ainsi $v_n = (An + B)(r_0^n) = (An+B)1^n = (An+B)$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

Mais $v_0 = \alpha \iff B = \alpha$

puis $v_1 = 2v_0 - f(v_0) = 2\alpha - f(\alpha)$

donc $A + B = 2\alpha - f(\alpha)$

c'est-à-dire $A + \alpha = 2\alpha - f(\alpha)$

d'où $A = \alpha - f(\alpha)$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = (\alpha - f(\alpha))n + \alpha$

d) Par l'absurde : si $\alpha - f(\alpha) \neq 0$ alors $(\alpha - f(\alpha))n \longrightarrow \pm\infty$

d'où $v_n \longrightarrow \pm\infty$

or $\alpha \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \alpha$

Mais v est bornée (dans $[0, 1]$)

donc c'est absurde.

Ainsi $\alpha = f(\alpha)$

2) Ainsi, si f est solution du problème, on a $\forall \alpha \in [0, 1]$, $f(\alpha) = \alpha$

et réciproquement, si on pose $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$

alors $\forall x \in [0, 1]$, $2x - f(x) = 2x - x = x \in [0, 1]$ (P_1 vérifiée)

et $f(2x - f(x)) = 2x - f(x) = 2x - x = x$ (P_2 vérifiée)

Ainsi, par analyse-synthèse, $\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} [0, 1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{array} \right\}$