Cap ECL (23-24)   DS 05   CORRIGÉ

Exercice 1 : $(E) : 1 - 5x = 2x^2 \ln x$

1) $\varphi(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{5}{x} - 2\ln x$, $\forall x > 0$

a) $\varphi(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - 5 - 2\ln x\right)$ or $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$ et $-2\ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$

donc par somme $\frac{1}{x} - 5 - 2\ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$

et par produit $\varphi(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$

b) φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ $\varphi'(x)$ est du signe de $-2x^2+5x-2$

$\forall x>0$, $\varphi'(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{5}{x^2} - \frac{2}{x} = \frac{1}{x^3}(-2+5x-2x^2)$ $x_1 = \frac{-5-3}{-4} = 2$ $x_2 = \frac{-5+3}{-4} = \frac{1}{2}$

$\Delta = 25 - 4(-2)(-2) = 25 - 16 = 9$

x	0		$1/2$		2		$+\infty$
$\varphi'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	
φ	$\|\| +\infty$	$\searrow$	$-6+2\ln 2<0$	$\nearrow$	$\varphi(2)<0$	$\searrow$	

or $1<2<e$ donc $0<\ln 2<1$ et $\boxed{\varphi(\frac{1}{2})<0}$

$\varphi(\frac{1}{2}) = -6 + 2\ln 2$

$\varphi(2) = \frac{1}{4} - \frac{5}{2} - 2\ln 2 = \frac{-9}{4} - 2\ln 2 < 0$ (car $\ln 2 > 0$)

φ est continue et strictement décroissante sur $]0, \frac{1}{2}]$; $0 \in [-6+2\ln 2, +\infty[$ (théorème des valeurs intermédiaires)

donc $\exists!\, \alpha \in]0, \frac{1}{2}[$, $\varphi(\alpha) = 0$ donc φ ne s'annule pas

Puis, d'après le tableau, $\forall x > \frac{1}{2}$, $\varphi(x) \leq \varphi(2) < 0$

(et $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$)

Ainsi $\exists!\, \alpha \in]0,+\infty[$, $\varphi(\alpha) = 0$

or $\varphi(\alpha) = 0 \iff \frac{1}{\alpha^2} - \frac{5}{\alpha} - 2\ln\alpha = 0 \iff 1 - 5\alpha = 2\alpha^2 \ln\alpha$

α est donc l'unique solution de (E) sur $]0,+\infty[$

2) $f(x) = \frac{1 - x - 2x^2\ln x}{4}$, $\forall x>0$

a) f est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme de fonctions continues et dérivables sur cet intervalle.

$\forall x>0$ $f'(x) = \frac{1}{4}\left(-1 - 4x\ln x - 2x^2 \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{4}(-1 - 4x\ln x - 2x)$

b) $x^2 \ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{1}{4}$ (qu'on notera encore $f(0)$)

on peut donc poser $\boxed{f(0) = \frac{1}{4}}$

$\forall x > 0$ $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{-x - 2x^2\ln x}{4x} = \frac{-1 - 2x\ln x}{4} \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\frac{1}{4}$

donc f est dérivable en 0 et $\boxed{f'(0) = -\frac{1}{4}}$

Ainsi $T_0 : y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$

c) $\forall x>0$, $f'(x) = \frac{1}{4}(-1 - 4x\ln x - 2x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\frac{1}{4} = f'(0)$

donc f' est continue en 0 (f est C^1 en 0)

$\forall x>0$, $\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{-4x\ln x - 2x}{4x} = -\ln x - \frac{1}{2} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$

donc f' n'est pas dérivable en 0 (f n'est PAS deux fois dérivable en 0)

d) $f''(x) = \frac{1}{4}\left(-4\ln x - 4x\frac{1}{x} - 2\right) = \frac{1}{4}(-4\ln x - 4 - 2) = -\ln x - \frac{3}{2}$ pour tout $x>0$

- $-\ln x - \frac{3}{2} = 0 \iff \ln x = -\frac{3}{2} \iff x = e^{-3/2} \in [0,1]$
- $-\ln x - \frac{3}{2} > 0 \iff -\frac{3}{2} > \ln x \iff e^{-3/2} > x$

x	0		$e^{-3/2}$		1
$f''(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
f'	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$f'(e^{-3/2})$	$\searrow$	$-\frac{3}{4}$
$f'(x)$					
f	$\frac{1}{4}$		$\longrightarrow$		0

$f'(e^{-3/2}) = \frac{1}{4}\left(-1 - 4e^{-3/2}(-\frac{3}{2}) - 2e^{-3/2}\right) = \frac{1}{4}(-1 + 4e^{-3/2})$

or $4e^{-3/2} = \frac{4}{e^{3/2}} < 1$ donc $\boxed{f'(e^{-3/2}) < 0}$

D'après le tableau, $\forall x \in [0,1]$ $-\frac{3}{4} \leq f'(x) \leq f'(e^{-3/2}) < 0 < \frac{3}{4}$

donc $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$

(on en déduit que f est $\frac{3}{4}$ lipschitzienne sur $[0,1]$)

De plus, $f'<0$ sur $[0,1]$ donc f décroît strictement sur $[0,1]$ et $f([0,1]) = [$

3) $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{5} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a) $u_0 = \frac{1}{5} \in [0,1]$ et $[0,1]$ est stable par f (f est décroissante sur $[0,1]$ car $f'<0$ et $f(0) = \frac{1}{4}$, $f(1) = 0$ donc $f([0,1]) = [0, \frac{1}{4}] \subseteq [0,1]$)

S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in [0,1]$, alors on aura $f(u_n) \in [0,1]$

donc $u_{n+1} \in [0,1]$

Finalement, $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \in [0,1]$

b) $\varphi(\alpha) = 0 \iff 1 - 5\alpha = 2\alpha^2\ln\alpha$ (d'après le b))

Alors $f(\alpha) = \frac{1 - \alpha - 2\alpha^2\ln\alpha}{4} = \frac{1 - \alpha - (1 - 5\alpha)}{4} = \alpha$ et $f(\alpha) = \alpha$

c) f est $\frac{3}{4}$ lipschitzienne sur $[0,1]$

or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$ et $\alpha \in [0,1]$

donc $|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{3}{4}|u_n - \alpha|$

d'où $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{4}|u_n - \alpha|$

d) Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$ (par récurrence immédiate avec le c))

or $-1 < \frac{3}{4} < 1$ donc $\left(\frac{3}{4}\right)^n \to 0$ d'où $|u_n - \alpha| \to 0$

ainsi $\boxed{u_n \to \alpha}$

e) On cherche $n \in \mathbb{N}$ tel que $\left(\frac{3}{4}\right)^n |u_0 - \alpha| \leq 10^{-5}$

or $|u_0 - \alpha| = \left|\frac{1}{5} - \alpha\right| \leq 1$ puisque $\frac{1}{5} \in [0,1]$ et $\alpha \in [0,1]$.

Il suffit donc de chercher n tel que $\left(\frac{3}{4}\right)^n \leq 10^{-5}$

or $\left(\frac{3}{4}\right)^n \leq 10^{-5} \iff n\ln\frac{3}{4} \leq \ln 10^{-5}$; $\ln\frac{3}{4} < 0$.

$\iff n \geq \frac{\ln 10^{-5}}{\ln\frac{3}{4}}$

Exercice 2 :

1) a) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ vérifiant $\begin{cases} f \text{ bornée} \\ f \text{ strictement positive} \\ f \text{ deux dérivable} \\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ \alpha f(x) \leq f''(x) \end{cases}$, avec $\alpha > 0$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$ $f(x) > 0$ (car f strictement positive)

or $\alpha > 0$ donc $\alpha f(x) > 0$ donc $f'' > 0$ sur $\mathbb{R}^+$

mais $f''(x) \geq \alpha f(x) > 0$ sur $\mathbb{R}^+ = [0,+\infty[$

d'où f' est croissante sur $\mathbb{R}^+$, f' admet une limite en $+\infty$ (finie ou infinie)

D'après le théorème de la limite monotone,

b) Soit $x > 0$, $\frac{x}{2} < x$ et $[\frac{x}{2}, x] \subseteq \mathbb{R}^+$ donc f est continue (car deux fois dérivable) sur $[\frac{x}{2}, x]$ et f est dérivable sur $]\frac{x}{2}, x[$, $\exists c_x \in]\frac{x}{2}, x[$, $f'(c_x) = \frac{f(x) - f(\frac{x}{2})}{x - \frac{x}{2}}$

D'après le théorème des accroissements finis,

d'où $\exists c_x \in]\frac{x}{2}, x[$, $f'(c_x) = \frac{2}{x}\left(f(x) - f(\frac{x}{2})\right)$

c) $\forall x > 0 \quad \frac{x}{2} < c_x < x$ donc $\frac{x}{2} < c_x$ et par minoration,

$$\boxed{c_x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty}$$

On $\frac{2}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ puis, f étant bornée sur $\mathbb{R}_+$, $\exists M \in \mathbb{R}_+, \ \forall t \in \mathbb{R}_+ \ |f(t)| \leqslant M$

d'où $\forall x > 0 \quad |f(x) - f(\frac{x}{2})| \leqslant |f(x)| + |f(\frac{x}{2})| \leqslant 2M$

or le produit d'une fonction bornée par une fonction tendant vers 0, tend vers 0. Ainsi $\frac{2}{x}\left(f(x) - f(\frac{x}{2})\right) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

d'où $\boxed{f'(c_x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0}$

Or on a vu au b) que f' admet une limite l en $+\infty$ (avec $l \in \overline{\mathbb{R}}$)

Comme $c_x \longrightarrow +\infty$, il vient $\boxed{f'(c_x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} l}$ d'où, par unicité de la limite, $l = 0$.

d) On a vu au 1) a) que f' est croissante sur $\mathbb{R}^+$

puis, au c) que $f'(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ $\quad f' \leqslant 0$ et f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

donc $0 = \sup\limits_{\mathbb{R}^+} f'(x)$ d'où

2) a) Comme f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et positive strictement sur $\mathbb{R}^+$,

on peut appliquer le théorème de la limite monotone : f décroissante et minorée par 0 sur $\mathbb{R}^+$ admet une limite finie en $+\infty$.

on pose $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

b) Comme f décroît, $l = \inf\limits_{\mathbb{R}^+} f$ donc $f(x) \geqslant l$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$

puis, $\alpha > 0$ donc $\alpha f(x) \geqslant \alpha l$ (avec le 4$^{\text{ième}}$ point)

mais $\forall x \geqslant 0$, $f''(x) \geqslant \alpha f(x) \geqslant \alpha l$

c) Ainsi $\forall x \geqslant 0 \quad f''(x) - \alpha l \geqslant 0$

posons $g(x) = f'(x) - \alpha l x$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$

$g'(x) = f''(x) - \alpha l \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$ donc $g' \geqslant 0$ et g est croissante sur $[0, +\infty[$; ainsi $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) \geqslant g(0)$

d'où $f'(x) - \alpha l x \geqslant f'(0)$

et $f'(0) + \alpha l x \leqslant f'(x)$.

d) Si $l \neq 0$ (comme $l \geqslant 0$), $\alpha l x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

donc $f'(0) + \alpha l x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

ainsi par minoration $f'(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ce qui est absurde ($f'(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$)