Exercice 1 :

$\varphi : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$

$P \longmapsto R$ reste de la division de P par $X^2 - X = X(X-1)$

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. $P = X^n + (X-1)^n + 1$

Par division euclidienne, $P = (X^2 - X)Q + R$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$, $R \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg(R) < 2$. Donc $R = \lambda X + \mu$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

$\widetilde{P}(0) = 0^n + (-1)^n + 1 = 0 \times \widetilde{Q}(0) + \widetilde{R}(0)$ d'où $\widetilde{R}(0) = (-1)^n + 1$ donc $\mu = (-1)^n + 1$

$\widetilde{P}(1) = 1^n + 0^n + 1 = 0 \times \widetilde{Q}(1) + \widetilde{R}(1)$ d'où $2 = \lambda + \mu$ d'où $\lambda = 2 - \mu = 1 - (-1)^n$

donc $R = (1 - (-1)^n)X + 1 + (-1)^n = \varphi(P)$

2) Par définition du reste dans la division euclidienne par $X^2 - X$, (de degré 2)

on a : $\varphi(\mathbb{R}[X]) \subseteq \mathbb{R}_1[X]$ (car $\deg R < 2$)

Réciproquement : soit $R_1 \in \mathbb{R}_1[X]$

prenons $P_1 = (X^2 - X) + R_1$

$P_1 \in \mathbb{R}[X]$ et $\varphi(P_1) = R_1$ donc R_1 est atteint par φ

Ainsi $\boxed{\varphi(\mathbb{R}[X]) = \mathbb{R}_1[X]}$

3) $\varphi(\mathbb{R}[X]) = \mathbb{R}_1[X] \neq \mathbb{R}[X]$

donc φ n'est pas surjective.

4) Soit $P_1 = 3(X^2 - X) + X + 1$

$P_2 = (X^3)(X^2 - X) + X + 1$

$P_1 \neq P_2$ mais $\varphi(P_1) = \varphi(P_2) = X + 1$

donc φ n'est pas injective.

Exercice 2

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, de degré $n \in \mathbb{N}^*$

1) on suppose que : $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $a_k = a_{n-k}$

Alors, soit $x \in \mathbb{R}^*$ $\quad x^n \widetilde{P}\left(\frac{1}{x}\right) = x^n \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\frac{1}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$ (1)

on pose $i = n - k$ (càd $k = n - i$)

$x^n \widetilde{P}\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} x^i = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \widetilde{P}(x)$

(P est réciproque)

Réciproquement,

on suppose que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $x^n \widetilde{P}\left(\frac{1}{x}\right) = \widetilde{P}(x)$

Alors $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}}_{\text{avec le (1)}} = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

d'où $\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ d'où $\sum_{k=0}^{n} (a_{n-k} - a_k) x^k = 0$

Posons $Q = \sum_{k=0}^{n} (a_{n-k} - a_k) X^k$ on a : $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $\widetilde{Q}(x) = 0$

donc Q est le polynôme nul (il a une infinité de racines)

et de ce fait, $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = a_{n-k}$

2) On suppose P réciproque, de degré $n \in \mathbb{N}$.

a) <u>Par l'absurde :</u> si $\widetilde{P}(0) = 0$ alors $\sum_{k=0}^{n} a_k 0^k = 0$ d'où $a_0 = 0$ mais alors $a_{n-0} = a_0 = 0$ d'où $a_n = 0$, ce qui est absurde ($\deg P = n$ donc $a_n \neq 0$, coef dominant de P).

Ainsi <u>0 n'est pas racine de P</u>

b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$; on suppose α racine de P

Alors $\widetilde{P}(\alpha) = 0 = \alpha^n \widetilde{P}\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ (car P vérifie ($\bigstar$))

d'où $\boxed{\widetilde{P}\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0}$ (car $\alpha \neq 0$ donc $\alpha^n \neq 0$)

c) Soit n impaire

On a : $\widetilde{P}(-1) = (-1)^n \widetilde{P}\left(\frac{1}{-1}\right)$ d'où $\widetilde{P}(-1) = (-1)^n \widetilde{P}(-1)$

donc $\widetilde{P}(-1) = -1\ \widetilde{P}(-1)$

d'où $2\widetilde{P}(-1) = 0$ donc $\widetilde{P}(-1) = 0$.

d) <u>On suppose que $\widetilde{P}(1) = 0$</u>

Comme on a $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $P(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$

en dérivant (sur $\mathbb{R}^*$) il vient $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $P'(x) = n x^{n-1} P\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} x^n P'\left(\frac{1}{x}\right)$

Prenons $x = 1$ $P'(1) = n P(1) - P'(1)$

or $P(1) = 0$ d'où $P'(1) = -P'(1)$

puis $2P'(1) = 0$ d'où $\boxed{P'(1) = 0}$

Ainsi <u>1 est racine multiple</u> ($\mathrm{mult}(1, P) \geq 2$).

<u>Exercice 3</u>

On pose $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\varphi(P) = 9XP - (X^2 - 1)P'$

1) Soit $n \in \mathbb{N}$; $P \in \mathbb{R}[X]$, $\deg(P) = n$

$P = a_n X^n + Q$ avec $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $a_n \neq 0$.

a)
$$\begin{aligned} \varphi(P) &= 9X(a_n X^n + Q) - (X^2 - 1)(n a_n X^{n-1} + Q') \\ &= 9a_n X^{n+1} + 9XQ - n a_n X^{n+1} - X^2 Q' + n a_n X^{n-1} + Q' \\ &= (9-n) a_n X^{n+1} + \underbrace{9XQ - X^2 Q' + n a_n X^{n-1} + Q'}_{R} \end{aligned}$$

or $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc :

$9XQ \in \mathbb{R}_n[X]$, $Q' \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$ d'où $X^2 Q' \in \mathbb{R}_n[X]$

donc $\varphi(P) = \underbrace{(9-n) a_n X^{n+1}}_{\in \mathbb{R}_{n+1}[X]} + \underbrace{R}_{\in \mathbb{R}_n[X]}$ avec $R \in \mathbb{R}_n[X]$

ainsi $\boxed{\varphi(P) \in \mathbb{R}_{n+1}[X]}$

b) Si $n \neq 9$ alors $(9-n) a_n \neq 0$ (car $a_n \neq 0$) et $\deg \varphi(P) = n+1$

On s'intéresse à l'équation (E) : $\varphi(P) = 9P$

2) a) Soit P solution non nulle de (E)

i) <u>Si $\deg P \neq 9$</u> alors $\deg \varphi(P) = n+1$; or $\deg 9P = n$

or $\varphi(P) = 9P$, donc <u>c'est absurde</u>.

Ainsi $\boxed{\deg P = 9}$

ii) $\varphi(P) = 9P$, $\deg \ldots$

donc $9XP - (X^2-1)P' = 9P$

ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$ $9x\,P(x) - (x^2-1)P'(x) = 9P(x)$

donc en prenant $x=-1$ $-9P(-1) - 0 = 9P(-1)$

d'où $18\,P(-1) = 0$ et $\boxed{P(-1)=0}$

iii) On pose $k = \mathrm{mult}(-1,P)$

$\exists T \in \mathbb{R}[X]$, $P = (X+1)^k T$ et $\tilde{T}(-1) \neq 0$

$\varphi(P) = 9P \iff 9X(X+1)^k T - (X^2-1)\left[k(X+1)^{k-1}T + (X+1)^k T'\right] = 9(X+1)^k T$

$\iff 9X(X+1)^k T - k(X-1)(X+1)^k T - (X-1)(X+1)^{k+1}T' = 9(X+1)^k T$

$\iff 9XT - k(X-1)T - (X-1)(X+1)T' = 9T$

$\iff (9-k)XT + kT - (X^2-1)T' = 9T$

$\iff (9-k)XT + (k-9)T - (X^2-1)T' = 0$

Prenons $x=-1$ $-(9-k)T(-1) + (k-9)T(-1) = 0$

$2(k-9)T(-1) = 0$

or $T(-1) \neq 0$ donc $\boxed{k=9}$

b) Ainsi , $\varphi(P) = 9P$ et $P \neq 0$ implique $\deg P = 9$, $\mathrm{mult}(-1,P) = 9$

Ainsi $\underline{P = \lambda(X+1)^9 \,,\ \lambda \in \mathbb{R}^*}$

<u>Reciproquement</u>, si $P = \lambda(X+1)^9$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$

$\varphi(P) = 9X\lambda(X+1)^9 - \lambda(X^2-1)9(X+1)^8 = 9\lambda X(X+1)^9 - 9\lambda(X-1)(X+1)^9$
$= 9\lambda(X-(X-1))(X+1)^9 = 9\lambda(X+1)^9$

Ainsi $\varphi(P) = 9P$, et ceci $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$

En fin, $P=0$ verifie (E) ; Finalement $\boxed{\mathcal{S}_{(E)} = \{\lambda(X+1)^9 \,,\ \lambda \in \mathbb{R}\}}$

3) On resout sur $I =]-1,1[$, $(x^2-1)y'(x) - 9(x-1)y(x) = 0$ (H)

a) y verifie (H) sur I $\iff$ $y'(x) = \dfrac{9(x-1)}{x^2-1}y(x) \iff y'(x) = \dfrac{9}{x+1}y(x)$

$a(x) = \dfrac{9}{x+1}$ $A(x) = 9\ln|x+1| = 9\ln(x+1)$

Ainsi $\exists C \in \mathbb{R}$, $\underline{y(x) = C\,e^{9\ln(x+1)} = C(x+1)^9}$

b) Si P est solution de (E) alors $\forall x \in]-1,1[$, $\varphi(P(x)) = 9P(x)$

d'ou $9x\tilde{P}(x) - (x^2-1)\tilde{P}'(x) = 9\tilde{P}(x)$

d'où $9(x-1)\tilde{P}(x) - (x^2-1)\tilde{P}'(x) = 0$ et $\tilde{P}$ verifie (H) sur I

ainsi $\exists C \in \mathbb{R}$, $\forall x \in]-1,1[$, $P(x) = C(x+1)^9$

Posons $Q = P - C(X+1)^9$

$\forall x \in]-1,1[$ $\tilde{Q}(x) = 0$ donc Q est nul (infinite de racines)

Ainsi $\underline{P = C(X+1)^9}$, $C \in \mathbb{R}$.