Exercice 1 (17 points). ... $\mathbb{R}^*$ par :

Exercice 1

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{x \,\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x - 1}$$

1) a) $\mathrm{sh}\, x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

donc $x \,\mathrm{sh}\, x = x^2 + \frac{x^4}{6} + o(x^4)$

$\mathrm{ch}\, x - 1 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$

b) $$\frac{x\,\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x - 1} = \frac{x^2 + \frac{x^4}{6} + o(x^4)}{\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)} = \frac{1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)}{\frac{1}{2} + \frac{x^2}{4!} + o(x^2)}$$

$$= \frac{1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)}{\frac{1}{2}\left[1 + \frac{2x^2}{4!} + o(x^2)\right]} = 2\left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) \frac{1}{1 + \frac{x^2}{12} + o(x^2)}$$

or $\frac{1}{1+u} \underset{u \to 0}{=} 1 - u + u^2 + o(u^2)$

ici $u(x) = \frac{x^2}{12} + o(x^2) \to 0$ donc $u^2(x) = o(x^2)$

$$\frac{1}{1 + \frac{x^2}{12} + o(x^2)} = 1 - \frac{x^2}{12} + o(x^2)$$

donc par produit $\frac{x\,\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x - 1} = 2\left(1 + \frac{x^2}{6}\right)\left(1 - \frac{x^2}{12}\right) + o(x^2)$

$= 2\left(1 - \frac{x^2}{12} + \frac{x^2}{6}\right) + o(x^2)$

$= 2 + \frac{2x^2}{12} + o(x^2) = 2 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)$

Donc $f(x) = -1 + 2x + 2 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)$

$$\boxed{f(x) = 1 + 2x + \frac{x^2}{6} + \underset{x \to 0}{o}(x^2)}$$

c) Ainsi $f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$ donc on peut prolonger f en 0 et poser $f(0) = 1$

f admettant un $DL_1(0)$, f est derivable en 0 et $f'(0) = 2$

d) $T_0 : y = 1 + 2x$ est la tangente à C_f en 0

e) $f(x) - (1 + 2x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x^2}{6}$ où $\frac{x^2}{6} \geqslant 0$ Donc C_f est au-dessus de sa tangente au voisinage de 0

2) a) $$\frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x - 1} - 1 = \frac{\mathrm{sh}\,x - \mathrm{ch}\,x + 1}{\mathrm{ch}\,x - 1} = \frac{\frac{1}{2}(e^x - e^{-x} - e^x - e^{-x}) + 1}{\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) - 1}$$

$$= \frac{-e^{-x} + 1}{\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} - 1} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\frac{1}{2}e^x} = +2e^{-1x}$$

donc $\boxed{A = +2,\ \alpha = -1}$

Ainsi $$\boxed{\frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x - 1} - 1 = +2e^{-x} + \underset{x \to +\infty}{o}(e^{-x})}$$

b) Donc $\frac{x\,\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x - 1} - x = +2xe^{-x} + \underset{x \to +\infty}{o}(xe^{-x})$

alors $f(x) = 2x - 1 + \left(\left(\frac{x\,\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x - 1} - x\right) + x\right) = 2x - 1 + 2xe^{-x} + x + \underset{x \to +\infty}{o}(xe^{-x})$

$$f(x) = \boxed{-1 + 3x + 2xe^{-x} + \underset{x \to +\infty}{o}(xe^{-x})}$$

$(b = -1,\ a = 3)$

b) $f(x) - (-1 + 3x) \underset{x \to +\infty}{\sim} +2xe^{-x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

donc C_f est asymptote à $\Delta : y = -1 + 3x$ en $+\infty$. C_f est au-dessus de Δ en $+\infty$.

Exercice 2

Soit $n \geq 1$ $\quad (E_n) : x^n + x^{n-1} \dots + x = 1$

1) Soit $f_n(x) = x^n + x^{n-1} \dots + x - 1$ pour $x \in \mathbb{R}^+$

$f_n'(x) = n x^{n-1} + \dots\dots + 1 > 0 \quad \forall x \geq 0.$

f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$ et strictement croissante

$f_n(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x^n$ et $x^n \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\lim\limits_{+\infty} f_n = +\infty$

$f_n(0) = -1 < 0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaire, $\exists! \, u_n \in \mathbb{R}^+ \mid f_n(u_n)$

2) Soit $n \geq 1$

on a $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$

donc $u_{n+1}^{n+1} + \underbrace{u_{n+1}^{n} + \dots + u_{n+1} - 1}$ $= 0$

d'où $u_{n+1}^{n+1} + f_n(u_{n+1}) = 0$

donc $f_n(u_{n+1}) = - u_{n+1}^{n+1} < 0$ (car $f_{n+1}(0) = -1 < 0 = f_{n+1}(u$ donc $u_{n+1} > 0$)

$f_n(u_n) = 0 > f_n(u_{n+1})$

or f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

et f_n donc (u_n) décroît strictement

donc $u_n > u_{n+1}$

4) Soit $n \geq 1$ $\quad u_n^n + u_n^{n-1} + \dots + u_n = 1$

$u_n^n + u_n^{n-1} + \dots + u_n) = u_n$

donc $u_n (u_n^n + u_n^{n-1} \dots + u_n^2 = u_n$

d'où $u_n^{n+1} + u_n^n \dots + u_n^2 + u_n = 1$ donne $u_n^n + \dots + u_n^2 = 1 - u_n$

Mais $u_n^n + \dots + u_n^2 + (1 - u_n) = u_n$

d'où $u_n^{n+1} + (1 - u_n) = u_n$

donc $u_n^{n+1} - 2u_n + 1 = 0$

3) • $f_1(u_1) = 0 \iff u_1 - 1 = 0 \iff u_1 = 1$

• $f_2(u_2) = 0 \iff u_2^2 + u_2 - 1 = 0$

u_2 est l'unique solution réelle positive de $X^2 + X - 1 = 0$

$\Delta = 1 + 4 = 5$

$X_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ou $X_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

or $X_1 < 0$ donc $u_2 = X_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0$

5) $u_n^{n+1} = 2u_n - 1 \iff e^{(n+1)\ln u_n} = 2u_n - 1$

or pour tout $n \geq 2$, $u_n < u_2$ donc $\ln(u_n) < \ln u_2 < 0$ car $2 < \sqrt{5} < 3$ donc $1 < \sqrt{5} - 1 < 2$ d'où $\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{5}-1}{2} <$

$(n+1)\ln(u_n) < (n+1)\ln u_2 \to -\infty$ donc $(n+1)\ln(u_n) \longrightarrow -\infty$ (par majoration)

mais $e^{u} \underset{u \to -\infty}{\longrightarrow} 0$ d'où $e^{(n+1)\ln(u_n)} \longrightarrow 0$

ainsi $2u_n - 1 \longrightarrow 0$

d'où $u_n \longrightarrow \frac{1}{2}$

6) Soit $n \geq 1$ on pose $\varepsilon_n = u_n - \frac{1}{2}$

on a $u_n^{n+1} - 2u_n + 1 = 0$ d'où $u_n^{n+1} = 2u_n - 1 = 2(u_n - \frac{1}{2}) = 2\varepsilon_n$

d'où $\frac{1}{2} u_n^{n+1} = \varepsilon_n$

puis $\frac{n}{2} u_n^{n+1} = n\varepsilon_n$

or (u_n) décroît strictement et tend vers $\frac{1}{2}$ et $u_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < 1$

donc $\forall n \geq 2$ $\frac{1}{2} < u_n < u_2$ } $x \mapsto x^{n+1}$ ↑ sur $\mathbb{R}_+^*$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < u_n^{n+1} < u_2^{n+1}$ d'où $\frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < n\varepsilon_n < \frac{n}{2} u_2^{n+1}$

par croissances comparées $\frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \longrightarrow 0$ (car $-1 < \frac{1}{2} < 1$)

et $\frac{n}{2} u_2^{n+1} \longrightarrow 0$ (car $-1 < u_2 < 1$)

par encadrement $n\varepsilon_n \longrightarrow 0$ (c'est-à-dire $\varepsilon_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$)

7) $u_n = \frac{1}{2} + \varepsilon_n$ avec $n\varepsilon_n \longrightarrow 0$ et $\varepsilon_n \to 0$

or $u_n^{n+1} - 2u_n + 1 = 0$ donc $\left(\frac{1}{2} + \varepsilon_n\right)^{n+1} - 2\left(\frac{1}{2} + \varepsilon_n\right) + 1 = 0$

d'où $e^{(n+1)\ln\left(\frac{1}{2} + \varepsilon_n\right)} - 2\varepsilon_n = 0$

$$\ln\left(\frac{1}{2} + \varepsilon_n\right) = \ln\frac{1}{2} + \ln(1 + 2\varepsilon_n)$$

} $\ln(1 + 2\varepsilon_n) \sim 2\varepsilon_n$ (car $2\varepsilon_n \to 0$)

$$= -\ln 2 + 2\varepsilon_n + o(\varepsilon_n)$$

$$= -\ln 2 + 2\varepsilon_n + o\left(\tfrac{1}{n}\right)$$

$$= -\ln 2 + 2\varepsilon_n + o(1)$$

$(n+1)\ln\left(\frac{1}{2} + \varepsilon_n\right) = -(n+1)\ln 2 + 2(n+1)\varepsilon_n + o(1)$

mais $n\varepsilon_n \to 0$

donc $n\varepsilon_n = o(1)$

puis $2(n+1)\varepsilon_n = o(1)$

ainsi $(n+1)\ln\left(\frac{1}{2} + \varepsilon_n\right) = -(n+1)\ln 2 + o(1)$

donc $2\varepsilon_n = e^{-(n+1)\ln 2 + o(1)} = \frac{1}{2^{n+1}} \times e^{o(1)}$

mais $e^{o(1)} \longrightarrow 1$

donc $e^{o(1)} \sim 1$

Ainsi $2\varepsilon_n \sim \frac{1}{2^{n+1}}$ d'où $\varepsilon_n \sim \frac{1}{2^{n+2}} = \frac{1}{4\,2^n}$

donc $u_n = \varepsilon_n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\,2^n} + o\left(\frac{1}{2^n}\right)$

Exercice 3

1) $f(x) = \sin(\tan x)$ $\quad \tan x \to 0$

or $\sin u \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^3}{6} + o(u^4)$ et $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$

$\tan^2 x = x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$

$\tan^3 x = x^3 + o(x^4)$

donc $\sin(\tan x) = (x + \frac{x^3}{3}) - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) = \boxed{x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)}$

2) $f(x) = \ln(2\cos x + \sin x) = \ln\left(2(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)) + (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))\right)$

$\underset{x\to 0}{=} \ln\left(2 + x - x^2 - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = \ln 2\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right)$

$= \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right)$

on pose $u(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)$ $\quad u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$

et $u^2(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$

$u^3(x) = \frac{x^3}{8} + o(x^3)$ et $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$

donc

$f(x) \underset{x\to 0}{=} \ln 2 + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{8}\right) + o(x^3)$

$= \ln 2 + \frac{x}{2} + x^2\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) + x^3\left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{24}\right) + o(x^3)$

$= \boxed{\ln 2 + \frac{x}{2} - \frac{5}{8}x^2 + \frac{5}{24}x^3 + o(x^3)}$

3) $\frac{1}{1+e^{2x}} = \frac{1}{1 + 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{6} + o(x^3)} = \frac{1}{2 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}$

on pose $u(x) = x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$ $\quad u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$

$\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3)$ $\quad u^2(x) = x^2 + 2x^3 + o(x^3)$

$u^3(x) = x^3 + o(x^3)$

donc $\frac{1}{1+e^{2x}} = \frac{1}{2}\left(1 - (x + x^2 + \frac{2}{3}x^3) + (x^2 + 2x^3) - x^3 + o(x^3)\right) = \boxed{\frac{1}{2}\left(1 - x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)}$

4) $\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+2t)} - \frac{1}{2t}\right) = ?$

$\frac{1}{\ln(1+2t)} - \frac{1}{2t} = \frac{1}{2t - \frac{(2t)^2}{2} + \frac{(2t)^3}{3} + o(t^3)} - \frac{1}{2t} = \frac{1}{2t - 2t^2 + o(t^2)} - \frac{1}{2t} = \frac{1}{2t}\left[\frac{1}{1 - t + o(t)} - 1\right]$

$= \frac{1}{2t}\left[1 + t + o(t) - 1\right]$ $\quad \left(\text{car } \frac{1}{1-u} \underset{u\to 0}{=} 1 + u + o(u)\right)$

$= \frac{1}{2} + o(1)$ donc $\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+2t)} - \frac{1}{2t}\right) = \boxed{\frac{1}{2}}$

5) $\forall x \in \mathbb{R}$, $|3\arctan x| \leq \frac{3\pi}{2}$ donc $3\arctan x \underset{x\to+\infty}{=} o(\sqrt{x})$ $\quad \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \to 0 \text{ donc } \frac{1}{\sqrt{x}} 3\arctan x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0\right)$

d'après le cours, $(\ln x)^3 \underset{x\to+\infty}{=} o(\sqrt{x})$

donc $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{x}}$

6) $f(x) = \frac{(e^x - 1)^2}{\operatorname{ch}(2x) - 1}$ or $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $(e^x - 1)^2 \underset{x\to 0}{\sim} x^2$

$\operatorname{ch}(2x) = 1 + \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2)$ donc $\operatorname{ch}(2x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} 2x^2$ donc $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$

d'où $\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}}$

$e^x - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x$ donc $(e^x - 1)^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{2x}$ puis $\operatorname{ch}(2x) = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{2x}}{2}$ or $-1 \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{2x})$

donc $\operatorname{ch}(2x) - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{2x}}{2}$ donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{2x}}{\frac{e^{2x}}{2}} = 2$ d'où $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2}$

C_f sa courbe représentative. $\quad \mathrm{ch}(x) - 1$.

) Donner les développement limités d'ordre 4 en 0 de $x\mathrm{sh}(x)$ et de $\mathrm{ch}(x) - 1$.

En déduire le développement limité d'ordre 2 en 0 de $f(\ldots$

En déduire que f est ...

L'appr...

7) $\begin{cases} f(0) = 2 \\ f(x) = \dfrac{\sin 2x}{1 - e^{-x}} \quad si\ x \neq 0 \end{cases}$

• $x \mapsto \dfrac{\sin 2x}{1 - e^{-x}}$ est C^1 sur $\mathbb{R}^*$ (car $1 - e^{-x} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}^*$ et $x \mapsto \sin 2x$ est C^1, $x \mapsto 1 - e^{-x}$ est C^1)

donc f est C^1 sur $\mathbb{R}^*$

• $\sin 2x \underset{x \to 0}{\sim} 2x$ et $1 - e^{-x} \underset{x\to 0}{\sim} -(-x) = x$ d'où $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{2x}{x} = 2$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2 = f(0)$

donc f est Continue en 0

Ainsi f est Continue sur $\mathbb{R}$, derivable sur $\mathbb{R}^*$

on peut appliquer le theoreme de la limite de f' en 0 :

$$f'(x) = \frac{2\cos(2x)(1 - e^{-x}) - e^{-x}\sin(2x)}{(1 - e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}(-2\cos(2x) - \sin(2x)) + 2\cos(2x)}{(1 - e^{-x})^2}$$

or $-2\cos(2x) - \sin(2x) = -2\left(1 - \frac{(2x)^2}{2}\right) - (2x) + o(x^2) = -2 + 4x^2 - 2x + o(x^2)$

$e^{-x} = 1 - x + \frac{(-x)^2}{2} + o(x^2)$ d'où $e^{-x}(-2\cos 2x - \sin 2x) = \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right)(-2 - 2x + 4x^2) + o(x^2)$

$= -2 - 2x + 4x^2 + 2x + 2x^2 - x^2 + o(x^2)$

$= -2 + 5x^2 + o(x^2)$

donc $e^{-x}(-2\cos(2x) - \sin(2x)) + 2\cos 2x = -2 + 5x^2 + 2\left(1 - \frac{(2x)^2}{2}\right) + o(x^2)$

$= -2 + 5x^2 + 2 - 4x^2 + o(x^2)$

$= + x^2 + o(x^2)$

$\underset{x\to 0}{\sim} x^2$

or $1 - e^{-x} \underset{x \to 0}{\sim} -(-x)$

donc $(1 - e^{-x})^2 \underset{x \to 0}{\sim} x^2$ d'où $f'(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

donc $f'(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$

d'où f est C^1 en 0 (et $f'(0) = 1$)