Cap ECL 19/03/24 DS08 INTEGRALES

1) a) $F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\arctan t}\,dt$

Pour tout $x>0$ on a $2x>0$ et $[x, 2x] \subseteq]0,+\infty[$, or $t \mapsto \frac{1}{\arctan t}$ est C^0 sur $]0,+\infty[$ donc $F(x)$ existe.

Pour tout $x<0$ on a $2x<0$ et $[2x, x] \subseteq]-\infty, 0[$, or $t \mapsto \frac{1}{\arctan t}$ est C^0 sur $]-\infty, 0[$ donc $F(x)$ existe. Ainsi $\boxed{D_F = \mathbb{R}^*}$

b) $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $-x \in \mathbb{R}^*$ et $F(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\arctan t}\,dt = \int_x^{2x} \frac{1}{\arctan(-u)}(-du) = \int_x^{2x} \frac{1}{\arctan u}\,du$ $\left(\begin{array}{l} u=-t \\ du=-dt \end{array}\right)$ $\xrightarrow{\text{arctan est impaire}}$

donc $F(-x) = F(x)$ et $\boxed{F \text{ est paire}}$.

2) a) $k(x) = 2\arctan x - \arctan(2x)$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

k est derivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $k'(x) = \frac{2}{1+x^2} - \frac{2}{1+(2x)^2} = \frac{2(1+4x^2-1-x^2)}{(1+x^2)(1+4x^2)} = \frac{6x^2}{(1+x^2)(1+4x^2)}$

$\forall x>0$, $k'(x)>0$ donc k est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

or $\lim\limits_{x\to 0} k(x) = 0$ donc $\boxed{\forall x>0 \quad k(x)>0}$

b) $x \mapsto x$ et $x \mapsto 2x$ sont derivables ($m^{\hat{}}$ C^1) sur $]0,+\infty[$ et à valeurs dans $]0,+\infty[$ or $t \mapsto \frac{1}{\arctan t}$ est C^0 sur $]0,+\infty[$ donc F est derivable ($m^{\hat{}}$ C^1) sur $]0,+\infty[$

De même sur $]-\infty, 0[$.

Donc F est derivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $F'(x) = 2\frac{1}{\arctan(2x)} - \frac{1}{\arctan x}$

c) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $F'(x) = \frac{2\arctan x - \arctan(2x)}{\arctan(2x)\arctan x} = \frac{k(x)}{\arctan(2x)\arctan(x)}$

$F'(x)$ est du signe de $k(x)$ (le dénominateur est strictement positif sur $\mathbb{R}_+^*$)

donc $F'(x)>0$, $\forall x>0$ et F est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

Ainsi

d) Soit $x>0$

posons $G_1 : x \mapsto \int_1^x \frac{1}{\arctan t}\,dt$ une primitive de $t \mapsto \frac{1}{\arctan t}$ sur $]0,+\infty[$

$F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\arctan t}\,dt = G_1(2x) - G_1(x)$ continue sur $[x, 2x]$ ainsi, d'après le

or G_1 est derivable sur $]x, 2x[$, $\exists c_x \in]x, 2x[$, $G_1(2x) - G_1(x) = (2x-x)G_1'(c_x)$

theoreme des accroissements finis. (thm fondamental)

or $G_1'(c_x) = \frac{1}{\arctan(c_x)}$

d'où $G_1(2x) - G_1(x) = \frac{x}{\arctan(c_x)} = F(x)$. Ainsi $\boxed{\forall x>0, \quad \frac{F(x)}{x} = \frac{1}{\arctan(c_x)}}$

$\forall x>0$ $x < c_x < 2x$ donc par minoration $c_x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

or $\arctan X \xrightarrow[X\to\frac{\pi}{2}]{} \frac{\pi}{2}$ d'où $\frac{F(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{2}{\pi}$ donc $\frac{F(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\pi}$

d'où $\boxed{F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2x}{\pi}}$

3) a) $g(t) = \frac{1}{\arctan t} - \frac{1}{t} = \frac{t - \arctan t}{t\arctan t}$

or $t - \arctan t = t - \left(t - \frac{t^3}{3} + o(t^3)\right) = \frac{t^3}{3} + \underset{t\to 0}{o}(t^3)$ d'où $t - \arctan t \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^3}{3}$

puis $t\arctan t \underset{t\to 0}{\sim} t^2$ donc par quotient, $\boxed{g(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{3}}$

ainsi $g(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ et on peut poser $\boxed{g(0) = 0}$

b) g est C^0 sur $\mathbb{R}^*$; soit G une primitive de g sur $\mathbb{R}$; $\forall x \neq 0$, $F(x) = \int_x^{2x} g(t)\,dt + \int_x^{2x} \frac{1}{t}\,dt$

$F(x) = G(2x) - G(x) + \ln 2$

... à l'image de $\mathbb{R}_+$ par la fonct. F. Ainsi ...

G est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $\mathbb{R}$

Ainsi $G(2x) - G(x) \xrightarrow[x \to 0]{} G(0) - G(0) = 0$

puis $F(x) \xrightarrow[x \to 0]{} \ln 2$; on peut prolonger F en posant $F(0) = \ln 2$

c) . $x \mapsto x$ et $x \mapsto 2x$ sont C^1 sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0[$

$t \mapsto \dfrac{1}{\arctan t}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc F est C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

. En 0 ? $\boxed{F \text{ est } \begin{cases} \text{continue sur tout } \mathbb{R} \\ \text{dérivable sur } \mathbb{R}^* \end{cases}}$

Pour $x \neq 0$, $F'(x) = \dfrac{2}{\operatorname{Arctan}(2x)} - \dfrac{1}{\operatorname{Arctan}(x)} = \dfrac{2}{2x - \frac{(2x)^3}{3} + o(x^3)} - \dfrac{1}{x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)}$

$= \dfrac{1}{x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)} - \dfrac{1}{x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)} = \dfrac{1}{x}\left[\dfrac{1}{1 - \frac{4}{3}x^2 + o(x^2)} - \dfrac{1}{1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)}\right]$

$= \dfrac{1}{x}\left[\left(1 + \frac{4}{3}x^2 + o(x^2)\right) - \left(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)\right]$ $\qquad \dfrac{1}{1-u} \underset{u \to 0}{=} 1 + u + o(u)$

$= \dfrac{1}{x}\left(x^2 + o(x^2)\right) \underset{x \to 0}{=} x + o(x)$

donc $F'(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$; d'après le Théorème de la limite de f', $\boxed{F \text{ est } \begin{cases}\text{dérivable en } 0 \\ C^1\end{cases}}$ et $\boxed{F'(0) = 0}$.

d) $F'(x) \underset{x \to 0}{=} x + o(x)$ donc en intégrant il vient,

$F(x) = F(0) + \dfrac{x^2}{2} + \underset{x \to 0}{o}(x^2) = \boxed{\ln 2 + \dfrac{x^2}{2} + \underset{x \to 0}{o}(x^2)}$

e) $\boxed{T_0 : y = \ln 2}$ est tangente à la courbe de F en 0

$f(x) - \ln 2 \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2} \geq 0$ donc $\mathcal{C}_F$ est au-dessus de T_0 au voisinage de 0.

4) $h(t) = t^2\left(\dfrac{1}{\operatorname{Arctan} t} - \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{t\pi^2}\right)$

a) On a vu en cours que : $\boxed{\forall t > 0 \quad \arctan t + \arctan \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2}}$

b) $\forall t > 0$, $h(t) = t^2\left(\dfrac{1}{\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{t}} - \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{t\pi^2}\right) = t^2\left(\dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{1 - \frac{2}{\pi}\arctan\frac{1}{t}} - \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{t\pi^2}\right)$

or $u(t) = \dfrac{2}{\pi}\arctan\dfrac{1}{t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$; $\arctan u \underset{u \to 0}{=} u + o(u^2)$

$\underset{t \to +\infty}{=} \dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{t} + o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et $\dfrac{1}{1-u} \underset{u \to 0}{=} 1 + u + u^2 + o(u^2)$

donc $h(t) = t^2\left(\dfrac{2}{\pi}\left(1 + \dfrac{2}{\pi t} + \dfrac{4}{\pi^2 t^2} + o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)\right) - \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi^2 t}\right)$

$= t^2\left(\dfrac{4}{\pi^2 t} + \dfrac{8}{\pi^3 t^2} + o\left(\dfrac{1}{t^2}\right) - \dfrac{4}{\pi^2 t}\right)$ $\qquad = \dfrac{8}{\pi^3} + o(1)$ donc $\boxed{h(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \dfrac{8}{\pi^3}}$

$= t^2\left(\dfrac{8}{\pi^3 t^2} + o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)\right)$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A > 0, \quad \forall t \geq A, \quad \left|h(t) - \dfrac{8}{\pi^3}\right| \leq \varepsilon$

on prend $\varepsilon = 1$; $\exists A_1 > 0 \mid \forall t \geq A_1$, $\dfrac{8}{\pi^3} - 1 \leq h(t) \leq \dfrac{8}{\pi^3} + 1$

donc h est bornée sur $[A_1, +\infty[$

Puis h, continue sur $\mathbb{R}_+^*$, est continue sur le segment $[1, A_1]$

donc finalement h est bornée sur $[1, +\infty[$

(ou bien : considérer $h\circ\tan$ sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$; $h\circ\tan$ est C^0 sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ ... $h\circ\tan(x) \to \frac{8}{\pi^3}$, on pose $h\circ\tan(\frac{\pi}{2}) = \frac{8}{\pi^3}$. Ainsi on ... C^0 continue sur un segment

4|4

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \in [\ln(2); +\infty[$, in
le théorème de la bijection,

Ainsi $\exists k \geq 0$, $\forall t \in [1, +\infty[$ $|h(t)| \leq k$

d'où $\forall t \geq 1$ $\left| \frac{1}{\text{Arctan} t} - \frac{2}{\pi} - \frac{4}{t\pi^2} \right| \leq \frac{k}{t^2}$ $t^2 > 0$

c) Soit $x > 1$

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\text{Arctan} t} dt = \int_x^{2x} \frac{1}{\text{Arctan} t} - \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2 t} dt + \int_x^{2x} \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2 t} dt$$

$$= \text{- - - - - - -} + \frac{2}{\pi}(2x - x) - \frac{4}{\pi^2}\left[\ln|t|\right]_x^{2x}$$

$$= \text{- - - - - - - -} + \frac{2}{\pi} x - \frac{4}{\pi^2} \ln 2$$

donc $\left| F(x) - \left(\frac{2}{\pi} x - \frac{4}{\pi^2} \ln 2 \right) \right| = \left| \int_x^{2x} \frac{1}{\text{Arctan} t} - \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2 t} dt \right|$

$$\leq \int_x^{2x} \left| \frac{1}{\text{Arctan} t} - \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2 t} \right| dt$$

($x \leq 2x$ pour $x > 1$)

$$\leq \int_x^{2x} \frac{k}{t^2} dt = k\left[-\frac{1}{t}\right]_x^{2x} = k\left(-\frac{1}{2x} + \frac{1}{x}\right) = k\left(\frac{1}{2x}\right)$$

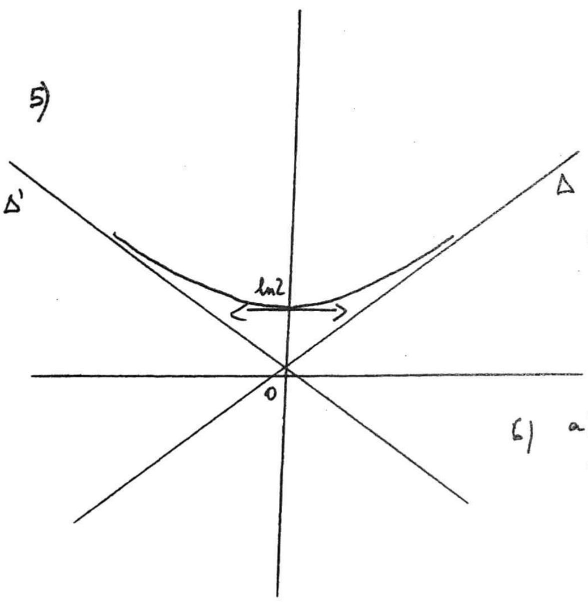
or $\frac{k}{2x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

donc par encadrement, $F(x) - \left(\frac{2}{\pi} x - \frac{4}{\pi^2} \ln 2\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

C_F est asymptote à Δ en $+\infty$.

d) Comme F est paire, C_F admet une asymptote Δ' en $-\infty$ (symétrique de Δ par rapport à (Oy))

5)



6) a) F est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ d'après le 2) d)

$F(0) = \ln 2 < \ln e = 1$

$F(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} x$

ainsi $F(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \in [F(0), +\infty[$

D'après le TVI, $\exists! \, x_n \in \mathbb{R}_+$, $F(x_n) = n$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n < n+1$

donc $F(x_n) < F(x_{n+1})$

or F est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, donc $x_n < x_{n+1}$ et

la suite (x_n) est croissante. Ainsi $x_n \to l \in \mathbb{R}^+$ ou $x_n \to +\infty$ (thm de la limite monotone)

Par l'absurde : si $x_n \to l \in \mathbb{R}^+$ (F est C^0 sur $\mathbb{R}^+$)

alors $F(x_n) \longrightarrow F(l)$ donc c'est contradictoire.

mais $\forall n \geq 1$ $F(x_n) = n \longrightarrow +\infty$

Ainsi $x_n \to +\infty$.

6) c)

Plus

F

d'o

ai

6/c) $x_n \longrightarrow +\infty$ et $F(x_n) = n \quad \forall n \geq 1$

or $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} x$ donc $\frac{2}{\pi} x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} F(x_n) = n$

d'où $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\frac{\pi}{2}$

Plus précisément,

$$F(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{2}{\pi} x + \frac{4}{\pi^2} \ln 2 + o(1)$$

d'où $n = \frac{2}{\pi} x_n + \frac{4}{\pi^2} \ln 2 \underset{n\to+\infty}{+} o(1)$

ainsi $\frac{2}{\pi} x_n = n - \frac{4}{\pi^2} \ln 2 \underset{n\to+\infty}{+} o(1)$

$$x_n = \frac{\pi}{2} n - \frac{2}{\pi} \ln 2 + o(1)$$