donc libre

DS9 (rapport [illegible])

Exercice 1

1) a) $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $S(M) = JMJ$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y = a \\ x = b \end{cases}$ donc $\iff \begin{cases} x = 0a + 1b \\ y = 1a + 0b \end{cases}$ donc $J^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = J$

b). $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $JMJ \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

. $\forall M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $S(\alpha M + N) = J(\alpha M + N)J = \alpha JMJ + JNJ$
$= \alpha S(M) + S(N)$

donc S est linéaire

. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ $S(M) = O_2 \iff JMJ = O_2$
$\iff J^{-1}JMJ = J^{-1}.O_2$
$\iff MJ = O_2 \iff MJJ^{-1} = O_2.J$
$\iff M = O_2$

donc S est injective
or $S \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ et $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) < +\infty$ donc S est bijective
Ainsi $S \in GL(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$

c) Soient $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
$S(MN) = JMNJ = JMJJ^{-1}NJ = JMJJNJ = S(M)S(N)$
$J^{-1} = J$

2) $\mathrm{card}(I, J, K, L) = 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
Il suffit de vérifier que la famille est libre.
Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ des réels tels que $\lambda_1 I + \lambda_2 J + \lambda_3 K + \lambda_4 L = O_2$
alors $\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 & \lambda_2 + \lambda_4 \\ \lambda_2 - \lambda_4 & \lambda_1 - \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ d'où $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$ donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$

ainsi (I, J, K, L) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

3) $JI = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = S(I) = I$

$J^2 = I$ et $JJJ = S(J) = J$

$JK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -K = S(K)$

$JL = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -K$ et $JLJ = -KJ = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -L$
donc $S(L) = -L$

$A = \underset{(I,J,K,L)}{\mathrm{mat}}(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

4) $A^2 = I_4$ donc $\underset{B}{\mathrm{mat}}(S \circ S) = \underset{B}{\mathrm{mat}}(Id_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})})$
d'où $S^2 = Id_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$ (S est une symétrie)

5) a) $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid S(M) = M\} = \mathrm{Ker}(S - Id_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})})$ or $S - Id_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$
donc F est un SEV de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
de même, $G = \mathrm{Ker}(S + Id_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})})$ et $S + Id_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$
donc G est un SEV de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

b) Par analyse-synthèse : soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; si $M = M_+ + M_-$
alors $S(M) = M_+ - M_-$
on a donc le système $\begin{cases} M = M_+ + M_- \\ S(M) = M_+ - M_- \end{cases} \iff \begin{cases} 2M_+ = M + S(M) \\ 2M_- = M - S(M) \end{cases}$
$\iff \begin{cases} M_+ = \frac{M + S(M)}{2} \\ M_- = \frac{M - S(M)}{2} \end{cases}$

Réciproquement

c) on
fa
et

Exercice

1) E
D'ap

2) Soit
fa
$\forall P$,

Soit

3) fa (
fa (X
fa ((X
fa ((X

Réciproquement, si on pose $M_+ = \frac{M + S(M)}{2}$ et $M_- = \frac{M - S(M)}{2}$

alors $M_+ + M_- = M$

de plus $S(M_+) = \frac{1}{2}\left(S(M) + S^2(M)\right)$

or $S(S(M)) = J\,JMJ\,J = M$ (car $J^2 = J^{-1}J = I$)

donc $S(M_+) = M_+$ d'où $M_+ \in \mathrm{Ker}(S - \mathrm{Id})$

et $S(M_-) = \frac{1}{2}\left(S(M) - S^2(M)\right) = \frac{1}{2}\left(S(M) - M\right) = -M$ donc

$M_- \in \mathrm{Ker}(S + \mathrm{Id})$

Ainsi $F \oplus G = \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = E$

ou bien : on remarque que $S^2 = \mathrm{Id}_E$ donc S symétrie donc d'après le cours $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$ et $p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E)$.

c) on remarque que S est la symétrie par rapport à F parallèlement à G donc $S = 2p - \mathrm{Id}_E$; ainsi $p = \frac{1}{2}(S + \mathrm{Id}_E)$

et $\forall M \in E$, $p(M) = M_+ = \frac{1}{2}(M + S(M)) = \frac{1}{2}(M + JMJ)$

Exercice 2 :

1) $E = \mathbb{R}_3[X]$ $\quad \mathcal{B} = (1, (X-1), (X-1)^2, (X-1)^3)$

D'après la formule de TAYLOR en 1, $\forall P \in E$ $\quad P = \sum_{k=0}^{3} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k$

donc $[P]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} P(1) \\ P'(1) \\ P''(1)/2 \\ P'''(1)/6 \end{pmatrix}$

2) Soit $a \in \mathbb{R}$.

$f_a(P) = P'' + (X-1)P' - aP$

$\forall P, Q \in E$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$f_a(\alpha P + Q) = (\alpha P + Q)'' + (X-1)(\alpha P + Q)' - a(\alpha P + Q)$

$\underset{\text{linéarité de la dérivée}}{=} \alpha P'' + Q'' + (X-1)(\alpha P' + Q') - a(\alpha P + Q)$

$= \alpha f_a(P) + f_a(Q)$

donc f_a est linéaire.

Soit $P \in E$ $\quad \deg P \leq 3$ donc $\deg P'' \leq 1$, $\deg P' \leq 2$

d'où $\deg(f_a(P)) \leq \mathrm{Max}(\deg P'', \deg (X-1)P', \deg aP)$

$\leq \mathrm{Max}(1, 3, 3) = 3$

et $f_a(P) \in E$

ainsi $f_a \in \mathcal{L}(E)$

3) $f_a(1) = -a\,1$

$f_a(X-1) = 0 + (X-1)1 - a(X-1) = (1-a)(X-1)$

$f_a((X-1)^2) = 2 + (X-1)2(X-1) - a(X-1)^2 = 2 + (2-a)(X-1)^2$

$f_a((X-1)^3) = 6(X-1) + (X-1)3(X-1)^2 - a(X-1)^3 = 6(X-1) + (3-a)(X-1)^3$

$$\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}(f_a) = \begin{pmatrix} -a & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-a \end{pmatrix}$$

4) Si $a = 0$ $\quad rg(f_a) = rg\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3$

Si $a = 1$ $\quad rg(f_a) = rg\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3$

Si $a = 2$ $\quad rg(f_a) = rg\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_3}{=} rg\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$

Si $a = 3$ $\quad rg(f_a) = rg\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$ $\quad C_4 \leftarrow C_4 + 3C_2$

Si $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2, 3\}$, $rg(f_a) = 4$
(matrice triangulaire sans 0 sur la diagonale)

5) Si $a \in \{0, 1, 2, 3\}$
alors, d'après le theoreme du rang,
$\dim \ker f_a + 3 = 4 = \dim \mathbb{R}_3[X]$ donc $\dim \ker f_a = 1$
$\ker f_0 = Vect(1)$ $\quad \ker f_1 = Vect(X-1)$ $\quad \ker f_2 = Vect(1+(X-1)^2)$ $\quad \ker f_3 = Vect(3(X-1)+(X-1)^3)$
Si $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2, 3\}$
$\dim \ker f_a + 4 = 4 = \dim \mathbb{R}_3[X]$ donc $\dim \ker f_a = 0$

6) f_a est bijectif dès qu'il est surjectif (car $f_a \in \mathcal{L}(E)$ et $\dim E < +\infty$)
or f_a surjectif $\iff rg f_a = 4 \iff a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2, 3\}$

Exercice 3 $\quad u : t \mapsto 1 \quad v : t \mapsto t \quad E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

1) $A = \{t \mapsto at + b \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = Vect(u, v)$
donc la famille (u, v) engendre A ; de plus elle est libre (2 vecteurs de E non colinéaires) donc (u, v) est une base de A.

2) $\varphi(f) = \int_{-1}^{1} f(t) e^{-t} \, dt, \quad \forall f \in E$
- $\forall f \in E, \quad \varphi(f) \in \mathbb{R}$
- $\forall f, g \in E \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \varphi(\alpha f + g) = \int_{-1}^{1} (\alpha f(t) + g(t)) e^{-t} \, dt \underset{\text{linéarité de l'intégrale}}{=} \alpha \varphi(f) + \varphi(g)$

donc φ est linéaire
Ainsi φ est une forme linéaire.

3) Soit g impaire
$$\int_{-1}^{1} g(t) \, dt \underset{\substack{s = -t \\ ds = -dt}}{=} \int_{1}^{-1} g(-s)(-ds) = -\int_{-1}^{1} -g(s)(-ds) = -\int_{-1}^{1} g(s) \, ds = -\int_{-1}^{1} g(t) \, dt$$
donc $\int_{-1}^{1} g(t) \, dt = 0$

or $\varphi(h) = \int_{-1}^{1} g(t) e^{t} e^{-t} \, dt = \int_{-1}^{1} g = 0$ d'où $\varphi(h) = 0$
d'où $h \in \ker \varphi$

4) a) $\varphi(u) \ldots$
$\varphi(v) \ldots$

b) A est $\ldots$
. $\ker \varphi \cap A \ldots$

. Soit $\ldots$

5) Par $\ldots$

Cher$\ldots$

Rec$\ldots$

4) a) $\varphi(u) = \int_{-1}^{1} 1e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_{-1}^{1} = -e^{-1} + e^{1} = e - \frac{1}{e}$

$\varphi(v) = \int_{-1}^{1} t e^{-t}\,dt \underset{IPP}{=} \left[-te^{-t}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} -e^{-t}\,dt = -e^{-1} + (-1)e^{1} + (e - \frac{1}{e})$

$= -\frac{1}{e} - e + e - \frac{1}{e} = -\frac{2}{e}$

b) A est de dimension finie

. $\operatorname{Ker}\varphi \cap A$ est un SEV de A donc $\operatorname{Ker}\varphi$ est de dimension finie (et $\dim \operatorname{Ker}\varphi \leq \dim A = 2$)

. Soit $l \in E$

$l \in \operatorname{Ker}\varphi \cap A \iff l \in \operatorname{Vect}(u, v)$ et $\varphi(l) = 0$

$\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid l = au + bv$ et $\varphi(l) = 0$

$\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a\varphi(u) + b\varphi(v) = 0$ et $l = au + bv$

$\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a(e - \frac{1}{e}) - \frac{2}{e}b = 0$ et $l = au + bv$

$\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid b = \frac{e}{2}(e - \frac{1}{e})a$ et $l = au + bv$

$\iff \exists a \in \mathbb{R} \mid l = au + (\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2})a\,v = a\underbrace{\left[u + (\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2})v\right]}_{\omega}$

ainsi $\operatorname{Ker}\varphi \cap A = \operatorname{Vect}(\omega)$

or (ω) est libre (1 vecteur non nul)

c'est une base de $\operatorname{Ker}\varphi \cap A$

5) Par analyse-synthese : Si la décomposition existe

Soit $f \in E$ $\quad f = \lambda u + (f - \lambda u)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

or $\lambda u \in G = \operatorname{Vect}(u)$

Cherchons $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f - \lambda u \in \operatorname{Ker}(\varphi)$

$f - \lambda u \in \operatorname{Ker}\varphi \iff \varphi(f - \lambda u) = 0 \iff \int_{-1}^{1} (f(t) - \lambda)e^{-t}\,dt = 0$

$\iff \int_{-1}^{1} f(t)e^{-t}\,dt - \lambda\int_{-1}^{1} e^{-t}\,dt = 0$

$\iff \lambda(e - \frac{1}{e}) = \int_{-1}^{1} f(t)e^{-t}\,dt$

$\iff \lambda = \frac{1}{e - \frac{1}{e}}\varphi(f)$

donc $f = \frac{\varphi(f)}{e - \frac{1}{e}}u + \left(f - \frac{\varphi(f)}{e - \frac{1}{e}}u\right)$

Reciproquement, on verifie que cette décomposition convient pour tout $f \in E$. Ainsi $F \oplus G = E$

De plus $p : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f - \frac{\varphi(f)}{e - \frac{1}{e}}u \end{array}$