CapECL Devoir surveillé n°9 le 14/ 05 / 2024

durée : 2h

Exercice 1.

Soit (a_n) une suite réelle. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$b_n = n(a_n - a_{n+1})\ ,\ A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \text{ et } B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

1. Dans cette question , on prend , pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

   (a) Vérifier que la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge et calculer sa somme.

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$.Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} nx^{n-1}$ converge si et seulement si $x \in]-1,1[$.

   (c) *En remarquant que* $x^n = (n+1)x^n - nx^n$, vérifier que si $x \in]-1,1[$, alors $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

   (d) Montrer maintenant que la série $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ converge et que sa somme vaut 2.

2. On prend dans cette question $a_n = \dfrac{1}{n\ln(n)}$, $n \geqslant 2$ et $a_1 = 0$

   (a) *A l'aide d'une comparaison série-intégrale,* montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ diverge.

   (b) Calculer $\lim_{n\to+\infty} na_n$.

   (c) Déterminer un équivalent de b_n puis en déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ diverge.

3. On suppose dans cette question que la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante .

   (a) Pour tout entier naturel n non nul, on note $u_n = \sum_{p=n+1}^{2n} a_p$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ na_{2n} \leqslant u_n$.

   (b) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} na_{2n} = 0$.

   (c) Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} na_n = 0$.

   (d) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ converge.

   (e) A-t-on $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$?

4. On suppose dans cette question que la série $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et de limite nulle.

   (a) Vérifier que $\forall (n,m) \in \mathbb{N}* \times \mathbb{N}^*,\ m \leqslant n \Rightarrow B_n \geqslant A_m - ma_{n+1}$.

   (b) En déduire que $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

   (c) Peut-on en déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$?

Exercice 2.

Donner la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

1. $u_n = \sqrt{n + \frac{1}{2}} - \sqrt{n}$
2. $u_n = \dfrac{\arctan(n)}{n^2}$
3. $u_n = (\frac{1}{3} + \frac{1}{n})^n$
4. $u_n = \mathrm{ch}^\alpha(n) - \mathrm{sh}^\alpha(n)$, suivant les valeurs prises par le paramètre réel α.