CapECL Devoir surveillé n°10 Probabilités (13/ 06 / 2024)

durée : 2h

Exercice 1 (20 points).
Pour tout entier $k \geqslant 2$, on considère la suite $(S_k(n))_{n\geqslant 2}$ définie par :

$$S_k(n) = \sum_{i=1}^{n} i^k$$

On note aussi, $X_1, X_2, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivantt la loi uniforme sur $\{1, ..., n\}$.
On pose $U_k = \text{Min}(X_1, ..., X_k)$.
Dans la suite k désigne un entier **fixé** supérieur ou égal à 2.

1. Rappeler les valeurs de $S_1(n)$ et $S_2(n)$ pour tout entier $n \geqslant 2$.

2. Donner $E(X_1)$. Montrer que $V(X_1) = \dfrac{(n+1)(n-1)}{12}$.

3. Déterminer à l'aide d'une somme de Riemann, la limite de la suite $(\dfrac{S_k(n)}{n^{k+1}})$ lorsque n tend vers $+\infty$, en fonction de l'entier fixé k.

4. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, ..., n\}$.

   (a) Soit $i \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $P(X = i)$ en fonction de $P(X \geqslant i)$ et $P(X \geqslant i + 1)$.

   (b) En déduire que :
   $$E(X) = \sum_{i=1}^{n} P(X \geqslant i).$$

   (c) Montrer également que l'on a :
   $$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} (2i-1)P(X \geqslant i)$$

5. (a) Soit $i \in \{1, ..., n\}$. Justifier que $P(U_k \geqslant i) = (\dfrac{n-i+1}{n})^k$.

   (b) Déduire des questions précédents que $E(U_k) = \dfrac{S_k(n)}{n^k}$.

   (c) Donner un équivalent de $E(U_k)$ lorsque n tend vers l'infini.

6. Démontrer que $E(U_k^2) = \dfrac{2n+1}{n^k} S_k(n) - \dfrac{2}{n^k} S_{k+1}(n)$.

7. En déduire que $V(U_k) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{k}{(k+1)^2(k+2)} n^2$.

Exercice 2 (20 points).

Un joueur lance 100 fois de suite une pièce de monnaie donnant **pile avec probabilité** p, avec $p \in]0,1[$.

Pour $N \in \{2, ..., 100\}$, on note X_N la variable aléatoire éale au nombre de fois , au cours des N premiers lancers, que deux résultats consécutifs ont été différents.

Autrement dit, X_N est égal au nombre de "changements" au cours des N premiers lancers.

Par-exemple, si les 9 premiers lancers sont les suivants :

PPFPFFFPP

Alors $X_2 = 0,\ X_3 = 1,\ X_4 = 2,\ X_5 = 3,\ X_6 = 3,\ X_7 = 3\ X_8 = 4,\ X_9 = 4.$

1. Justifier que pour tout $N \in \{2, ..., 100\}, X_N$ est à valeurs dans $\{0..., N-1\}$.

   On pose, pour tout $k \in \{1, ..., 100\}$:

   $$A_k = \text{"on obtient Pile au k-ième lancer"}.$$

   Dans les questions 3) et 4) , on se servira de ces évènements.

2. Les évènements A_k sont évidemment **indépendants.** Dire ce que cela signifie d'après le cours.

3. Montrer que X_2 suit la loi de Bernoulli de paramètre $2p(1-p)$.
   Quelle est son espérance ?

4. Déterminer la loi de X_3.

5. Soit $N \in \{2, ..., 100\}$. Montrer que $P(X_N = 0) = p^N + (1-p)^N$.

6. Pour tout $k \in \{3, ..., 100\}$, on définit la variable aléatoire Y_k par :

   $$Y_k = X_k - X_{k-1}.$$

   On pose également $Y_2 = X_2$.

   (a) Justifier sans calcul que , pour tout $k \in \{2, ...100\}$, Y_k suit la même loi que X_2.

   (b) Soit $N \in \{2, ..., 100\}$.Exprimer X_n à l'aide des Y_k. En déduire $E(X_N)$.

7. (a) Soit $k \in \{3, ...99\}$. Calculer $P((Y_k = 1) \cap (Y_{k+1} = 1))$.
   En déduire que , si $p \neq \frac{1}{2}$, alors Y_k et Y_{k+1} ne sont pas indépendantes.

   (b) *On admet que si* $p = \frac{1}{2}$, *alors toutes les variables* Y_k *sont indépendantes.*
   Soit $N \in \{2, ..., 100\}$. Déterminer sans calculs la loi de X_N.

Cg ECL DS n° 10 PROBABILITES