CapECL	Devoir surveillé n°2 le 26/09/2023

durée : 2h

Exercice 1 (20 points).
On rapelle que ,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ et } \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

1. Justifier que ,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ (\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x))^n = \mathrm{ch}(nx) + \mathrm{sh}(nx).$$

2. On considère l'application

$$c : \begin{cases} [0, +\infty[\to [1, +\infty[\\ x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{cases}.$$

Montrer (soigneusement) que l'application c est bijective et déterminer l'expression de son application réciproque.

3. On considère maintenant l'application

$$f : x \mapsto \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$$

(a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que f est impaire.

(c) Montrer que , $\forall x \in \mathbb{R}, \ f \circ \mathrm{sh}(x) = x$.

(d) Montrer que l'équation $\mathrm{sh}(x) = \sqrt{3}$ admet une unique solution réelle qu'on notera x_0.

(e) En utilisant la question 3)c) , déterminer x_0 .

(f) En déduire les solutions de l'équation $\mathrm{ch}(x) = 2$.

Les fonctions Q_n :

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose, pour x réel tel que $|x| \geqslant 1$,

$$Q_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2-1})^n + (x - \sqrt{x^2-1})^n}{2}.$$

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \geqslant 1$. Calculer $Q_0(x), Q_1(x)$ et $Q_2(x)$

(b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad , Q_n(\mathrm{ch}(x)) = \mathrm{ch}(nx)$ et $Q_n(-\mathrm{ch}(x)) = (-1)^n \mathrm{ch}(nx)$.

Exercice 2 (20 points).
On considère les applications :

$$h : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{x^2+1}{x} \end{cases} \quad \text{et } f : \begin{cases} \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto z + \dfrac{1}{\overline{z}} \end{cases}$$

1. Dresser le tableau des variations de h.

   L'application h est-elle injective ? Surjective ?

2. (a) Soit $z = re^{i\theta}$, avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que $f(z) = h(r)e^{i\theta}$.

   (b) Montrer que i n'admet aucun antécédent par f.

   (c) Déterminer l'unique antécédent de $1 + i\sqrt{3}$ par f.

   (d) Montrer que $\dfrac{5i}{2}$ admet exactement deux antécédents par f (les déterminer).

   (e) f est-elle injective ? Surjective ?

3. On considère maintenant la partie $B = \{z \in \mathbb{C}, |z| = \frac{1}{2}\}$. Déterminer $f^{-1}(B)$.

4. On pose $E = \{z \in \mathbb{C}, |z| \geqslant 1\}$, $F = \{z \in \mathbb{C}, |z| \geqslant 2\}$.

   Montrer que $\forall z \in E,\ f(z) \in F$.

5. On considère la restriction g de f aux ensembles E et F :

$$g : \begin{cases} E \to F \\ z \mapsto z + \dfrac{1}{\overline{z}} \end{cases}$$

   Montrer que g est bijective .