CapECL Devoir surveillé n°3 le 14/11/2023

durée : 2h

Exercice 1 (14 points).

On se propose de déterminer l'ensemble des fonctions f telles que :

$$(P) \quad f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}\ ,\ f \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[\text{ et },\ \forall x > 0, f\left(\frac{1}{4x}\right) = f'(x).$$

1. **Préambule** :

   (a) Montrer que la fonction $\alpha : x \mapsto \sqrt{x}$ est solution de (P).

   (b) Déterminer l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont solutions de l'équation différentielle :
   $$(F)\ :\ 4Y''(t) - 4Y'(t) + Y(t) = 0$$

2. **Analyse** : On suppose dans cette question que f est une fonction vérifiant (P).

   (a) Justifier que f' est dérivable sur $]0,+\infty[$

   (b) Démontrer que la fonction f est alors solution de l'équation différentielle :
   $$(E) : y''(x) + \frac{1}{4x^2}y(x) = 0, \quad \forall x > 0$$
   (*cette équation n'étant pas à coefficients constants, on ne cherchera pas à la résoudre directement*)

   (c) On introduit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = f(e^t)$.
   On admet que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Montrer que g est solution de l'équation différentielle $(F) : 4Y''(t) - 4Y'(t) + Y(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$

   (d) En déduire la forme de $f(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.

3. **Synthèse** : Déduire des questions précédentes toutes les fonctions solutions du problème (P).

Exercice 2 (14 points).

On considère la fonction donnée par $f(x) = \text{Arctan}\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$

1. Déterminer le domaine de définition, D_f de la fonction f.

2. Étudier la parité de f.

3. Déterminer le domaine Δ_f sur lequel on peut assurer que f est dérivable et donner une expression simplifiée au maximum de $f'(x)$.

4. **Expression simplifiée de f :**

   (a) Démontrer que $\forall x \in]0,1], f(x) = \text{Arccos}(x)$.

   (b) Déterminer, en utilisant des considérations de parité, une expression analogue de $f(x)$ sur le reste de D_f.

   (c) Tracer la courbe représentative de f.

   (d) Résoudre sur D_f l'équation $f(x) = \dfrac{\pi}{3}$.

Exercice 3 (12 points).

Dans cet exercice, on se place sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$.

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : x^2y''(x) - xy'(x) + y(x) = \ln(x), \ \forall x \in I$$

Soit y une fonction deux fois dérivable sur I.

On pose $z(x) = xy'(x) - y(x)$.

1. Démontrer que :

   $x \mapsto y(x)$ est solution de (E) si et seulement si $x \mapsto z(x)$ est solution de $(F) : xz'(x) - z(x) = \ln(x), \quad \forall x \in I$

2. Résoudre sur I l'équation homogène $(H) : xz'(x) - z(x) = 0$.

3. Soit $g : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2}$.

   Une primitive de g sur I s'écrit $G : x \mapsto \displaystyle\int^x \frac{\ln(t)}{t^2} dt$. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $G(x)$.

4. Déterminer alors l'ensemble des solutions de (F).

5. En déduire les solutions de (E).(*on aura à résoudre une équation différentielle d'ordre* 1).