Exercice 1.

On considère l'équation :

$$(E) : 1 - 5x = 2x^2 \ln x$$

1. Soit φ définie sur $]0, +\infty[$ par $\varphi(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{5}{x} - 2\ln x$.
   (a) Déterminer la limite φ en 0^+.
   (b) En étudiant la fonction φ , montrer que l'équation (E) admet et une seule solution α sur $\mathbb{R}_+^*$ et justifier le fait que $\alpha \in]0, \dfrac{1}{2}[$.

2. Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \frac{1 - x - 2x^2 \ln x}{4}$$

   (a) Montrer que f est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$. Préciser $f'(x)$.
   (b) Montrer que l'on peut prolonger f en une fonction continue et dérivable sur $[0, +\infty[$. Préciser alors $f(0)$, $f'(0)$ et la tangente en $x = 0$.
   (c) La fonction f ainsi prolongée est-elle deux fois dérivable en 0 ?
   (d) Étudier les variations de f' et de f sur $[0, 1]$ et prouver que :

$$\forall x \in [0, 1] \text{ , } f(x) \in [0, 1] \text{ et } | f'(x) | \leqslant \frac{3}{4}$$
$$(\textit{indication} : e^{\frac{3}{2}} = e\sqrt{e} \approx 4,48)$$

3. Recherche d'une valeur approchée de α :

   On définit la suite (u_n) par $u_0 = \dfrac{1}{5}$ et , pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

   (a) Justifier le fait que , $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$.
   (b) Monter que α (l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$), est un point fixe pour f.
   (c) Justifier le fait que $\forall n \in \mathbb{N}, | u_{n+1} - \alpha | \leqslant \dfrac{3}{4} | u_n - \alpha |$.
   (d) En déduire que la suite (u_n) converge .
   (e) Comment faire pour obtenir alors une valeur approchée à 10^{-5} près de α ?

Exercice 2 (points).

On considère une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ vérifiant les quatre points suivants :

$$\begin{cases} f \text{est bornée sur } \mathbb{R}_+ \\ f \text{est strictement positive sur } \mathbb{R}_+ \\ f \text{est deux fois dérivable sur } \mathbb{R}_+ \\ \text{Il existe une constante } \alpha > 0 \text{ telle que , pour tout } x \in \mathbb{R}_+,\ \alpha f(x) \leqslant f''(x) \end{cases}$$

1. Etude de la monotonie de f :
   (a) justifier que f' admet une limite (finie ou infinie) en $+\infty$.
   (b) Montrer que , pour tout $x > 0$, il existe $c_x \in]\frac{x}{2}, x[$ tel que $f'(c_x) = \frac{2}{x}(f(x) - f(\frac{x}{2}))$.
   (c) En déduire que $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.
   (d) Conclure que la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

2. Détermination de la limite de f en $+\infty$:
   (a) Justifier que f admet nécessairement une limite finie en $+\infty$.
   On notera l cette limite.
   (b) Montrer que pour tout $x \geqslant 0, \alpha l \leqslant f''(x)$.
   (c) En déduire que , pour tout $x \geqslant 0,\ f'(0) + \alpha l x \leqslant f'(x)$.
   (d) Montrer que $l = 0$.