CapECL Devoir surveillé n°6 le 30/01/2024

durée : 2h

Exercice 1 (8 points).

On considère l'application $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto R(\textbf{reste dans la division euclidienne de } P \textbf{ par } X^2 - X) \end{cases}$

1. Soit $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Déterminer l'image de $P = X^n + (X-1)^n + 1$ par φ.
2. Déterminer $\varphi(\mathbb{R}[X])$.
3. L'application φ est-elle surjective ?
4. L'application φ est-elle injective ?

Exercice 2 (14 points).

On dit qu'un polynôme P à coefficients réels $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, de degré $n \in \mathbb{N}^*$, est **réciproque** si :

$$\forall k \in \{0, 1, ..., n\},\ a_k = a_{n-k}$$

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré $n \in \mathbb{N}^*$.
   Montrer que , P est réciproque si et seulement si :
   $$(\bigstar),\ \forall x \in \mathbb{R}^*,\ P(x) = x^n P(\frac{1}{x})$$
2. On suppose dans cette question que P est réciproque, de degré $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que 0 n'est pas racine de P.

   (b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Montrer que :
   $$\alpha \text{ est racine de } P \Rightarrow \frac{1}{\alpha} \text{ est racine de } P.$$
   (c) Démontrer que :
   $$n \text{ est impair} \Rightarrow -1 \text{ est racine de } P.$$

   (d) On suppose que 1 est racine de P. Montrer que 1 est racine multiple de P.

Exercice 3 (18 points).

Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose :

$$\varphi(P) = 9XP - (X^2 - 1)P'$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré n.

   On rappelle qu'on peut écrire alors ,
   $$P = a_n X^n + Q \text{ avec } Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \text{ et } a_n \neq 0.$$
   (a) Montrer que $\varphi(P) \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$.

   (b) Montrer que , si $n \neq 9$, alors $\varphi(P)$ est un polynôme de degré $n+1$.

   Dans les questions suivantes, on s'intéresse à l'équation suivante
   $$(E) : \varphi(P) = 9P.$$
2. *Première méthode de résolution* :

   (a) Soit P une solution non nulle de (E).

i. Déterminer le degré de P.

ii. Montrer que -1 est racine de P.

iii. On note k l'ordre de multiplicité de -1 comme racine de P, et T le polynôme tel que $P = (X+1)^k T$ et $\tilde{T}(-1) \neq 0$.
Montrer que $k = 9$.

(b) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

3. *Deuxième méthode de résolution* :
Bien-sûr, on ne se servira pas des résultats de la question précédente.

(a) Déterminer les solutions sur $]-1,1[$ de l'équation $(x^2-1)y'(x) - 9(x-1)y(x) = 0$

(b) En déduire (soigneusement) l'ensemble des solutions de (E).