NOM Prénom : BONELLI Baptiste.

CapECL Devoir surveillé n°7 le 21/02/2024

durée : 2h30

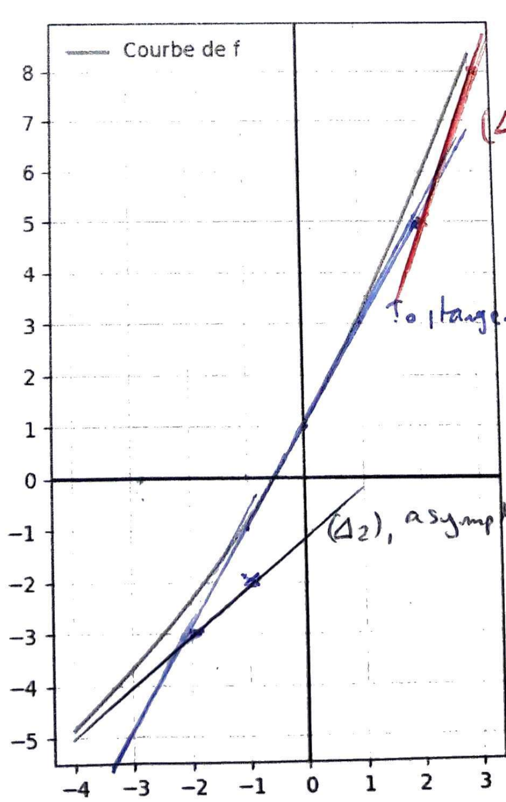
Exercice 1 (17 points).
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{x\,\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x) - 1}.$$

On note C_f sa courbe représentative.

1. (a) Donner les développement limités d'ordre 4 en 0 de $x\mathrm{sh}(x)$ et de $\mathrm{ch}(x) - 1$.
   (b) En déduire le développement limité d'ordre 2 en 0 de $f(x)$.
   (c) En déduire que f est prolongeable par continuité en 0. On notera encore f ce prolongement.
   (d) L'application f est-elle dérivable en 0 ?
   (e) Quelle(s) information(s) peut-on déduire de la question 1)b) sur C_f au voisinage de 0 ?

2. (a) Donner un équivalent de $\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x) - 1} - 1$ en $+\infty$ de la forme $Ae^{\alpha x}$ où A et α sont des réels à préciser.
   (b) En déduire des nombres réels a et b tels que l'on puisse écrire
   $$f(x) = ax + b + Axe^{\alpha x} + \underset{x \to +\infty}{o}(xe^{\alpha x}).$$
   (c) Quelle(s) information(s)peut-on en déduire sur C_f au voisinage de $+\infty$?
   (d) On admettra que l'on a de manière similaire
   $$f(x) = x - 1 - 2xe^{x} + \underset{x \to -\infty}{o}(xe^{x})$$
   Quelles information peut-on en déduire au sujet de C_f en $-\infty$?
   (e) Compléter avec soin le dessin ci-dessous à l'aide des informations obtenues aux questions 1)e) , 2)c) et d).



212

Exercice 2 (17 points).

Soit $n \geqslant 1$. On considère l'équation

$$(E_n) : x^n + x^{n-1} + ... + x = 1$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k \quad - 1$

1. Montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}^+$, notée u_n.
2. Démontrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.
3. Que vaut u_1 ? Calculer u_2.
4. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :
$$u_n^{n+1} - 2u_n + 1 = 0.$$
5. Montrer que la suite (u_n) tend vers $\frac{1}{2}$.
6. Pour $n \geqslant 1$, on pose $\varepsilon_n = u_n - \frac{1}{2}$. Montrer que $n\varepsilon_n$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ (ce qui s'écrit $\varepsilon_n = o(\frac{1}{n})$).
7. En déduire, à l'aide de la question 3) le développement asymptotique suivant de u_n, pour n tendant vers $+\infty$.
$$u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4.2^n} + o(\frac{1}{2^n})$$

Exercice 3 (Feuille de calcul : 16 points).

1. Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $f(x) = \sin(\tan(x))$.
2. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f(x) = \ln(2\cos(x) + \sin(x))$.
3. Développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\frac{1}{1+e^{2x}}$.
4. Déterminer $\lim_{t\to 0}(\frac{1}{\ln(1+2t)} - \frac{1}{2t})$
5. Déterminer un équivalent simple en $+\infty$ de $f(x) = 3\arctan(x) + 2\sqrt{x} + (\ln(x))^3$.
6. Soit $f(x) = \frac{(e^x-1)^2}{\text{ch}2x - 1}$; à l'aide d'équivalents calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
7. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(0) = 2 \\ \forall x \neq 0, \ f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{1-e^{-x}} \end{cases}$ Démontrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.