Exercice 1.
On considère la fonction F définie par

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\text{Arctan}(t)} dt.$$

1. (a) Déterminer le domaine de définition de F.

   (b) Étudier la parité de F.

2. (a) Étudier , sur $\mathbb{R}_+^*$ les variations puis le signe de $k(x) = 2\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(2x)$.

   (b) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer sa dérivée.

   (c) Étudier les variations de F sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (d) Soit $x > 0$.
   Démontrer qu'il existe un réel $c_x \in]x, 2x[$, tel que $F(x) = \dfrac{x}{\text{Arctan}(c_x)}$ et en déduire un équivalent de $F(x)$ en $+\infty$.

3. (a) Trouver un équivalent de $g(t) = \dfrac{1}{\text{Arctan}(t)} - \dfrac{1}{t}$ lorsque t tend vers 0.
   En déduire que g est prolongeable par continuité en 0.
   On note encore g son prolongement.

   (b) Montrer que F admet une limite finie en 0 et la déterminer.
   On note encore F le prolongement.

   (c) F est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$? Justifier soigneusement.

   (d) Montrer que F admet un développement limité d'ordre 2 en 0 et le déterminer.

   (e) Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative C de F en 0.
   Préciser la position de C par rapport à sa tangente en ce point.

4. Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ on pose : $h(t) = t^2(\dfrac{1}{\text{Arctan}(t)} - \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{t\pi^2})$.

   (a) Que vaut $\text{Arctan}(t) + \text{Arctan}(\dfrac{1}{t})$ pour $t \in \mathbb{R}_+^*$?

   (b) Montrer que h admet une limite finie lorsque t tend vers $+\infty$.
   En déduire que h est bornée sur $[1, +\infty[$ puis que $\exists k \in \mathbb{R}_+, \forall t \geqslant 1, |\dfrac{1}{\text{arctan}(t)} - \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{t\pi^2}| \leqslant \dfrac{k}{t^2}$.

   (c) En déduire que la courbe de F admet pour asymptote $\Delta : y = \dfrac{2}{\pi}x + \dfrac{4}{\pi^2}\ln 2$ lorsque x tend vers $+\infty$.

   (d) Que peut-on en déduire en $-\infty$?

5. Donner l'allure de la courbe représentative de F en reportant les éléments obtenus lors des questions précédentes.

6. Étude d'une suite implicite :

   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists! x \in \mathbb{R}_+, F(x) = n$. On note x_n cette valeur.

   (b) Montrer que la suite (x_n) est croissante et tend vers $+\infty$.

   (c) Donner un équivalent , puis un développement asymptotique à deux termes de x_n en $+\infty$.