CapECL Devoir surveillé n°9 le 09/04/2024

durée : 2h

Exercice 1.

Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 , muni de sa structure d'espace vectoriel et soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

On considère l'application S de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même qui , à tout élément M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'élément :

$$S(M) = JMJ.$$

1. (a) Montrer que J est inversible et donner son inverse.

   (b) Montrer soigneusement que l'application S ainsi définie est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   (c) Montrer que si M et N sont deux éléments quelconques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a $S(MN) = S(M)S(N)$.

2. On considère les éléments :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Montrer que $(I, J, K, , L)$ forme une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Déterminer la matrice A représentant l'automorphisme S dans la base (I, J, K, L).

4. Donner A^2. Que peut-on en déduire ?

5. On pose :

$$F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid S(M) = M\} \text{ et } G = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid S(M) = -M\}$$

   (a) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   (b) Démontrer que $F \oplus G = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

   (c) Donner l'expression de la projection sur F parallèlement à G.

Exercice 2.

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, et soit $\mathcal{B} = (1, (X-1), (X-1)^2, (X-1)^3)$ une base de E.

1. Soit P un pôlynôme appartenant à E. Exprimer les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$.

2. Etant donné un réel fixé a , on considère l'application f_a définie sur E par :

$$f_a(P) = P'' + (X-1)P' - aP$$

   Montrer que f_a est un endomorphisme de E.

3. Déterminer la matrice de f_a dans la base $\mathcal{B}$.

4. Déterminer le rang de f_a selon la valeurs de a.

5. En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(f_a)$ selon la valeur de a puis expliciter $\mathrm{Ker}(f_a)$selon les valeurs d du réel a.

6. Pour quelle(s) valeur(s) de a l'endomorphisme f_a est-il bijectif ?

Exercice 3.

On se place dans le $\mathbb{R}$- espace vectoriel $E = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On note $A = \{t \mapsto at + b, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ le sous-espace vectoriel des applications affines de E.

On définit aussi les fonctions u et v sur $\mathbb{R}$ par

$$u : t \mapsto 1 \text{ et } v : t \mapsto t$$

1. Donner sans justification une base et la dimension de A.

2. On considère φ l'application définie sur E par $\varphi(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)e^{-t}dt$.

   Montrer que φ est une forme linéaire.

3. Montrer que si g est une fonction impaire , alors la fonction $h : t \mapsto g(t)e^t$ est dans le noyau de φ.

4. (a) Calculer $\varphi(u)$ et $\varphi(v)$

   (b) Expliquer pourquoi $\mathrm{Ker}(\varphi) \cap A$ est de dimension finie puis en déterminer une base.

5. Soit $G = \mathrm{Vect}(u)$ la droite vectorielle engendrée par u dans E.
   Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi) \oplus G = E$ et donner l'expression de la projection sur $\mathrm{Ker}(\varphi)$ parallèlement à G.