Exercice 1 : Calcul de $A_n = \sum_{k=1}^{n} k2^k$

1) **Première méthode**

a) $I =]1, +\infty[$ $\quad \forall x \in I \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$

f est dérivable sur I (polynôme) et $f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1}$

b) $\forall x \in I$, $x \neq 1$ donc $f(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1-x}$ (somme géométrique de raison différente de 1)

donc $\forall x > 1$, $$f'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) - (-1)(1 - x^{n+1})}{(1-x)^2}$$
$$= \frac{-(n+1)x^n + (n+1)x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

donc $$f'(x) = \frac{-(n+1)x^n + nx^{n+1} + 1}{(1-x)^2}$$

c) $\forall x > 1 \quad f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1}$ donc pour $x = 2 > 1$, $f'(2) = \sum_{k=1}^{n} k2^{k-1}$

ainsi $2f'(2) = 2\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k2^k = A_n$

d'où $A_n = 2f'(2)$

Mais avec 1) b), on a aussi $f'(2) = \dfrac{-(n+1)2^n + n2^{n+1} + 1}{(-1)^2}$

donc $$A_n = 2f'(2) = 2\left(-(n+1)2^n + n2^{n+1} + 1\right)$$
$$= -(n+1)2^{n+1} + n2^{n+2} + 2$$
$$= 2^{n+1}(-(n+1) + 2n) + 2$$

ainsi $$A_n = 2^{n+1}(n-1) + 2$$

2) **Deuxième méthode**

$$S_n = \sum_{0 \leq i < j \leq n} 2^j$$

a) $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} 2^j$

et $S_n = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{j-1} 2^j$

b) Ainsi $S_n = \sum_{j=1}^{n} \left(2^j \sum_{i=0}^{j-1} 1\right) = \sum_{j=1}^{n} (2^j j) = A_n$

et puis $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n} 2^j - \sum_{j=0}^{i} 2^j\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\dfrac{1-2^{n+1}}{1-2} - \dfrac{1-2^{i+1}}{1-2}\right)$ (SG de raison $q = 2 \neq 1$)

$= \sum_{i=0}^{n-1} \left((2^{n+1} - 1) - (2^{i+1} - 1)\right) = \sum_{i=0}^{n-1} 2^{n+1} - \sum_{i=0}^{n-1} 2^{i+1}$

$= 2^{n+1} \times n - 2\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = n2^{n+1} - 2\left(\dfrac{1-2^n}{1-2}\right) = n2^{n+1} + 2(1-2^n)$

$= 2^{n+1}(n-1) + 2$

$= A_n$.

Exercice 2

Soit $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad (E) : \left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \dfrac{1 + i\tan a}{1 - i\tan a}$

1) $$Z_a = \frac{1 + i\tan(a)}{1 - i\tan(a)} = \frac{1 + i\frac{\sin a}{\cos a}}{1 - i\frac{\sin a}{\cos a}} = \frac{\frac{\cos a + i\sin a}{\cos a}}{\frac{\cos a - i\sin a}{\cos a}} = \frac{e^{ia}}{e^{-ia}} = e^{i2a}$$

donc $|Z_a| = 1$ et $\operatorname{Arg}(Z_a) = 2a \, [2\pi]$

2) (F) : $\omega^n = \dfrac{1 + i\tan a}{1 - i\tan a} \iff \omega^n = Z_a \iff \omega^n = e^{i2a}$

$\iff \omega^n = (e^{i\frac{2a}{n}})^n \iff \left(\dfrac{\omega}{e^{i\frac{2a}{n}}}\right)^n = 1$ $\quad (e^{i2a} \neq 0 \ \forall a \in]0, \frac{\pi}{2}[)$

$\iff \dfrac{\omega}{e^{i\frac{2a}{n}}} \in \mathbb{U}_n = \{ e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in [\![0, n-1]\!] \}$

$\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!]$, $\omega = e^{i(\frac{2a}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$

3) Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2p\pi \mid p \in \mathbb{Z}\}$

$$\frac{e^{i\theta} - 1}{i(e^{i\theta} + 1)} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}})}{i(e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}))} = \frac{2i\sin\frac{\theta}{2}}{i(2\cos\frac{\theta}{2})} = \tan\frac{\theta}{2}$$

(on vérifie que $\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2p\pi, p \in \mathbb{Z}\}$, $\frac{\theta}{2} \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + p\pi, p \in \mathbb{Z}\}$ donc $\tan\frac{\theta}{2}$ existe)

4) $\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \dfrac{1 + i\tan a}{1 - i\tan a}$

$\iff \dfrac{1+iz}{1-iz}$ vérifie $(F) \iff \exists k \in [\![0, n-1]\!] \mid \dfrac{1+iz}{1-iz} = e^{i\left(\frac{2(a+k\pi)}{n}\right)}$

$\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!]$, $1 + iz = (1 - iz)e^{i\frac{2(a+k\pi)}{n}}$ et $iz \neq 1$

$\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!]$, $z(i + ie^{i\frac{2(a+k\pi)}{n}}) = e^{i\frac{2(a+k\pi)}{n}} - 1$ et $z \neq -i$

$\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!]$, $z = \dfrac{e^{i\frac{2(a+k\pi)}{n}} - 1}{i(e^{i\frac{2(a+k\pi)}{n}} - 1)}$

$\forall k \in [\![0, n-1]\!]$ $e^{i\frac{2(a+k\pi)}{n}} + 1 \neq 0$

en effet : avec $\theta_k = \frac{2(a+k\pi)}{n}$

$e^{i\theta_k} + 1 = 0 \iff \theta_k = \pi \, [\pi]$

$\iff 2a + 2k\pi = n\pi \, [n\pi]$

$\iff 2a = (n-2k)\pi \, [n\pi]$

or $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$ donc $2a \in]0, \pi[$

d'où $2a \neq p\pi, \forall p \in \mathbb{Z}$

(avec le 3))

$\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!]$, $z = \tan\left(\dfrac{\theta_k}{2}\right)$ (on a bien $z \neq -i$ car $z \in \mathbb{R}$)

$\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!]$, $z = \tan\left(\dfrac{a + k\pi}{n}\right)$

5) Si z est solution de (E) alors

$\left|\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^n\right| = \left|\dfrac{1 + i\tan a}{1 - i\tan a}\right| = 1$

donc $\left|\dfrac{1+iz}{1-iz}\right|^n = 1$ or un module est un REEL positif donc on a forcément $\left|\dfrac{1+iz}{1-iz}\right| = 1$

d'où $|1 + iz| = |1 - iz|$ donc $|1+iz|^2 = |1-iz|^2$

d'où $(1+iz)(1-i\bar{z}) = (1-iz)(1+i\bar{z})$ donc $\cancel{1} + iz - i\bar{z} + z\bar{z} = \cancel{1} - iz + i\bar{z} + z\bar{z}$

d'où $i(z - \bar{z}) = -i(z - \bar{z})$

donc $2i(z - \bar{z}) = 0$ d'où $z - \bar{z} = 0$ et donc $z \in \mathbb{R}$

Exercice 3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1) $z^n + 1 = 0 \iff z^n = -1 \iff z^n = e^{i\pi} \iff \left(\frac{z}{e^{i\frac{\pi}{n}}}\right)^n = 1$

$\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!] , \ z = e^{i\frac{\pi}{n}} \times e^{\frac{i2k\pi}{n}}$

2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(z + e^{\frac{i2k\pi}{n}}\right)^n \underset{\text{(binôme)}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} z^p \left(e^{\frac{i2k\pi}{n}}\right)^{n-p}$

$\displaystyle \underset{\substack{\text{(on inverse les}\\ \text{sommes)}}}{=} \sum_{p=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{p} z^p \left(e^{\frac{i2k\pi}{n}}\right)^{n-p} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} z^p \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{i2k\pi}{n}}\right)^{n-p}\right)}_{a_p}$

b) Soit $p \in [\![0, n]\!]$

$\displaystyle a_p = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}(n-p)} \underset{\text{Moivre}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\frac{2\pi}{n}(n-p)}\right)^k$

or $e^{i\frac{2\pi}{n}(n-p)} = 1 \iff \frac{2\pi}{n}(n-p) = 0 \ [2\pi]$

$\iff 2\pi - \frac{2p\pi}{n} = 0 \ [2\pi]$

$\iff \frac{2p\pi}{n} = 2\pi \ [2\pi]$

$\iff 2p\pi = 2n\pi \ [2n\pi]$

$\iff p \equiv n \ [n] \underset{(\text{car } p \in [\![0, n]\!])}{\iff} p = n$ ou $p = 0$

- Pour $p \neq 0$ et $p \neq n$ on a :

$\displaystyle a_p \underset{\substack{\text{(somme géométrique)}\\ \text{de raison} \neq 1}}{=} \frac{1 - \left(e^{i\frac{2\pi}{n}(n-p)}\right)^n}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}(n-p)}} = \frac{1 - e^{i2\pi(n-p)}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}(n-p)}} = 0$

(car $e^{i2\pi(n-p)} = 1$)

- Pour $p = 0$ ou $p = n$ on a :

$\displaystyle a_0 = a_n = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$

car la raison q vaut 1 dans les 2 cas

c) Ainsi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(z + e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n \underset{\substack{\text{(seuls 2 termes}\\ \text{de la somme}\\ \text{sont non nuls)}}}{=} \binom{n}{0} a_0 z^0 + \binom{n}{n} a_n z^n = 1.n.1 + 1.n.z^n$

$= n + nz^n = n(1+z^n)$

3) a) Soit $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$ $\quad e^{i\theta} + e^{i\theta'} = e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\left(e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} + e^{i\frac{\theta'-\theta}{2}}\right)$

$= e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} \, 2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)$

b) Prenons $z_0 = e^{i\frac{\pi}{n}}$ (la solution de (H) correspondant à $k = 0$)

on a $z_0^n + 1 = 0$ donc d'après 2c) on a aussi

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(z_0 + e^{\frac{i2k\pi}{n}}\right)^n = n(z_0^n + 1) = 0$

mais $z_0 + e^{\frac{i2k\pi}{n}} = e^{i\frac{\pi}{n}} + e^{\frac{i2k\pi}{n}} \underset{\text{avec 3) a)}}{=} e^{i\frac{\pi + 2k\pi}{2n}} \, 2\cos\left(\frac{\pi - 2k\pi}{2n}\right)$

ainsi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2n}} \, 2\cos\left(\frac{\pi(1-2k)}{2n}\right)\right)^n = 0$

cos est paire donc $\cos\left(\frac{[illegible]}{2n}\right) = \cos\frac{[illegible]}{2n}$

d'où $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2}} \, 2^n \cos^n\left(\frac{\pi(2k-1)}{2n}\right) = 0$

or $e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2}} = i^{2k+1} = (i^2)^k \times i = (-1)^k i$

on a donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k i \, 2^n \cos^n\left(\frac{\pi(2k-1)}{2n}\right) = 0$

d'où $\displaystyle 2^n i \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos^n\left(\frac{\pi(2k-1)}{2n}\right) = 0$

or $2^n i \neq 0$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos^n\left(\frac{\pi(2k-1)}{2n}\right) = 0$