Cap ECG 1 (24-25) DS 10 20/05/2025

1) Soit $n \in \mathbb{N}$ $\quad S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(I_3)^k = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) I_3$ or $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^1 = e$

donc $S_n \longrightarrow e I_3$ ainsi $E(I_3)$ existe et $E(I_3) = e I_3$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$ $\quad S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(O_3)^k = \frac{1}{0!} O_3^0 + O_3 \dots + O_3 = I_3 + O_3 \quad + O_3$

donc la suite de matrices est constante et

$S_n \longrightarrow I_3$ donc $E(O_3)$ existe et $E(O_3) = I_3$

3) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} D^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} \end{pmatrix}$

or $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \longrightarrow e$ et $\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} \longrightarrow e^2$

donc $S_n \longrightarrow \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}$ ainsi $E(D)$ existe et $E(D) = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}$

4) a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad M^3 = O_3$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ $\quad S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k = \frac{M^0}{0!} + \frac{M^1}{1!} + \frac{M^2}{2!} = \underbrace{I_3 + M + \frac{1}{2} M^2}$

ne depend pas de n (pour $n \geq 3$)

donc $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} I_3 + M + \frac{1}{2} M^2$ d'où $E(M) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

donc $E(M)$ existe et $E(M) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\det(E(M)) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{dév}/L_3}{=} (-1)(-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{vmatrix} = -(0-1) = 1$

On $\mathrm{Tr}(M) = 0$ donc $e^{\mathrm{Tr}(M)} = e^0 = 1 = \det(E(M))$

5) Soit A nilpotente d'indice 3 et f associé à A dans $\mathcal{C}$

a) Soit $x \notin \mathrm{Ker}(f^2)$ (x existe car $A^2 \neq O_3$)

Soient α, β, γ des réels tels que $\alpha x + \beta f(x) + \gamma f^2(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$

alors $f^2(\alpha x + \beta f(x) + \gamma f^2(x)) = f^2(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3}$

d'où $\alpha f^2(x) + \beta . 0_{\mathbb{R}^3} + \gamma . 0_{\mathbb{R}^3} = 0_{\mathbb{R}^3}$ car $f^3(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$ et $f^4(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$ puisque $A^3 = A^4 = O_3$

or $f^2(x) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ (car $x \notin \mathrm{Ker} f^2$)

d'où $\alpha = 0$

de même $f(\beta f(x) + \gamma f^2(x)) = f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3}$

donc $\beta f^2(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$ d'où $\beta = 0$

puis $\gamma f^2(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$ d'où $\gamma = 0$ et $(x, f(x), f^2(x))$

est libre. On $\dim \mathbb{R}^3 = 3 = \mathrm{card}\underbrace{(x, f(x), f^2(x))}_{\mathcal{B}}$

c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) $N = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(x) & f(f(x)) & f(f^2(x)) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} x \\ f(x) \\ f^2(x) \end{array}$ $\qquad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $P = P_{\mathcal{C} \to \mathcal{B}}$ donc $N = P^{-1} A P$ ou encore $A = P N P^{-1}$

et $\forall k \in \mathbb{N}$, $N^k = P^{-1} A^k P$ ou $A^k = P N^k P^{-1}$

d) $E(N) = I + N + \frac{1}{2} N^2$ (puisque N est nilpotente d'indice 3 comme la matrice M du 4))

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= P\left(I + N + \frac{1}{2} N^2\right) P^{-1} = P\, E(N)\, P^{-1}$

e) $\det E(A) = \det(P\, E(N)\, P^{-1}) = \det P \det(E(N)) \det P^{-1} = \det E(N)$

(car $\det P^{-1} = \frac{1}{\det P}$) $\qquad = 1$ (matrice triangul

or $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(N) = 0$ donc $e^{\mathrm{Tr}(A)} = e^0 = 1 = \det(E(A))$

6) $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \det(B - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & -3 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 2-\lambda \\ -2 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & -3 & -\lambda \end{vmatrix}$ $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$

$\overset{\text{linéarité}/L_1}{=} (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & -3 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5-\lambda & 4 \\ 2 & -3 & -\lambda-2 \end{vmatrix}$ $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$

$\overset{\text{dév}^t/L_1}{=} (2-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ -3 & -\lambda-2 \end{vmatrix} = (2-\lambda)((-2-\lambda)(5-\lambda) + 12)$

$= (2-\lambda)[-10 + 2\lambda - 5\lambda + \lambda^2 + 12] = (2-\lambda)[2 - 3\lambda + \lambda^2]$

$\Delta = 9 - 8 = 1$

$\lambda = \frac{3 \pm 1}{2}$ ou $\lambda = 2$ ou

$= (2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-1)$

$= -(\lambda-2)^2(\lambda-1)$

b) $(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(B - I_3) \iff \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x + 3y + 2z = 0 \\ -2x + 4y + 2z = 0 \\ 2x - 3y - z = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} -x + 3y + 2z = 0 & L_1 \\ -2y - 2z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 3y + 3z = 0 & L_3 + 2L_1 \to L_3 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} -x + 3y + 2z = 0 \\ y + z = 0 & L_2 \leftarrow \frac{L_2}{-2} \\ y + z = 0 & L_3 \leftarrow \frac{L_3}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases}$

donc $\mathrm{Ker}(B - I_3) = \{(-z, -z, z),\ z \in \mathbb{R}\}$

$= \mathrm{Vect}(\underbrace{(-1, -1, 1)}_{e_1})$

(e_1) est libre (1 vecteur $\neq \vec{0}$) c'est une base de $\mathrm{Ker}(B - I_3)$

$(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(B-2I_3) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x+3y+2z=0 \\ \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow -2x+3y+2z=0$

$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}y + z$

$\mathrm{Ker}(B-2I_3) = \left\{ \left(\frac{3}{2}y+z, y, z\right),\ (y,z)\in\mathbb{R}^2 \right\}$

$= \mathrm{Vect}\left(\underbrace{\left(\frac{3}{2}, 1, 0\right)}_{e_2}, \underbrace{(1,0,1)}_{e_3} \right)$

(e_2, e_3) est libre (échelonnée), c'est une base de $\mathrm{Ker}(B-2I_3)$

c) $\mathcal{F} = (e_1, e_2, e_3)$

$\det_{\mathcal{C}}(e_1,e_2,e_3) = \begin{vmatrix} -1 & 3/2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3/2 & 1 \\ 0 & -1/2 & -1 \\ 0 & 3/2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix}$

dév $|L_1$

$= (-1)\begin{vmatrix} -1/2 & -1 \\ 3/2 & 2 \end{vmatrix} = -\left(-1+\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2} \neq 0$ donc

$\mathcal{F} = (e_1, e_2, e_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$

d) On prend $P = \begin{pmatrix} -1 & 3/2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

P est $P_{\mathcal{C} \to \mathcal{F}}$ et f canoniquement associée à B

alors $\mathrm{mat}_{\mathcal{F}}(f) = \begin{array}{c|c} f(e_1)\ f(e_2)\ f(e_3) & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} \end{array} = D$ donc $B = PDP^{-1}$

e) Soit $n\in\mathbb{N}$ $\quad S_n(D) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} D^k = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}2^k & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} \end{pmatrix}$

or $\forall x\in\mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^x$

donc $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \longrightarrow e$ et $\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} \longrightarrow e^2$

donc $S_n(D) \longrightarrow \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} = E(D)$

déjà vu au 3)

Puis $S_n(B) = \sum_{k=0}^{n} \frac{B^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{PD^kP^{-1}}{k!} = P \sum_{k=0}^{n} \frac{D^k}{k!} P^{-1}$

$\xrightarrow[n\to+\infty]{} P\,E(D)\,P^{-1}$

donc $E(B) = P\,E(D)\,P^{-1}$.