Exercice 1

$X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$ $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$ $S = \mathrm{Max}(X,Y)$ $T = \mathrm{Min}(X,Y)$

1) $S(\Omega) = [\![1,n]\!]$

Soit $k \in [\![1,n]\!]$, $P(S \leq k) = P((X \leq k) \cap (Y \leq k)) \underset{X \perp Y}{=} P(X \leq k)P(Y \leq k) = \frac{k}{n} \times \frac{k}{n} = \boxed{\frac{k^2}{n^2}}$

Donc $P(S=k) = P(S \leq k) - P(S \leq k-1)$

(pour $k=1$ $P(S \leq k-1) = P(S \leq 0) = 0$ et $P(S=1) = P(S \leq 1)$)

d'où $P(S=k) = \frac{k^2}{n^2} - \frac{(k-1)^2}{n^2} = \frac{(k-(k-1))(k+(k-1))}{n^2} = \boxed{\frac{2k-1}{n^2}}$

Ainsi $E(S) = \sum_{k=1}^{n} k\, P(S=k) = \sum_{k=1}^{n} k \frac{(2k-1)}{n^2} = \frac{1}{n^2}\left(2\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k\right)$

$= \frac{1}{n^2}\left(2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{1}{n^2}\left(n(n+1)\left[\frac{2n+1}{3} - \frac{1}{2}\right]\right)$

$E(S) = \frac{n+1}{n}\left[\frac{4n+2-3}{6}\right] = \boxed{\frac{(n+1)(4n-1)}{6n}}$

2) On remarque que $T + S = X + Y$ or E est linéaire

donc $E(T) + E(S) = E(X) + E(Y)$

d'où $E(T) = \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{2} - \frac{(n+1)(4n-1)}{6n} = (n+1)\left(1 - \frac{4n-1}{6n}\right)$

$E(T) = (n+1)\left(\frac{6n-4n+1}{6n}\right) = \boxed{\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}}$

3) $P((S=1) \cap (T=n)) = 0$ (événement impossible)

or $P(S=1)P(T=n) = P((X=1)\cap(Y=1))\, P((X=n)\cap(Y=n)) \underset{X \perp Y}{=} \frac{1}{n^2} \times P(X=n)P(Y=n)$

$= \frac{1}{n^2} \times \frac{1}{n^2} \neq 0$

donc S et T ne sont pas indépendantes.

Exercice 2

1) a) $Y = (-1)^X$ $Z = \frac{Y+1}{2}$

Si X prend une valeur paire alors Y prend la valeur 1 et $Z=1$

Si X prend une valeur impaire alors Y vaut (-1) donc $Z = 0$

Ainsi $Z(\Omega) = \{0,1\}$

$P(Z=1) = P(X \text{ pair}) = P(A)$

donc $\boxed{Z \hookrightarrow \mathcal{B}(P(A))}$

b) D'après le cours $E(Z) = P(A)$ $E(Z) = E\left(\frac{Y+1}{2}\right) = \frac{1}{2}E(Y) + \frac{1}{2}$

et E est linéaire, donc

d'où $P(A) = \frac{1}{2}E(Y) + \frac{1}{2}$

donc $\boxed{E(Y) = 2P(A) - 1}$

c) X suit $\mathcal{B}(n,p)$; $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ $\forall k \in [\![0,n]\!]$ $P(X=k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

d) $Y = (-1)^X$ donc par la formule de transfert,

$E(Y) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-p)^k(1-p)^{n-k} \underset{\text{Binôme}}{=} (-p+(1-p))^n = (1-2p)^n$

e) Ainsi $E(Y) \underset{(1)b)}{=} 2P(A) - 1 \underset{(2)d)}{=} (1-2p)^n$ donc $\boxed{P(A) = \frac{1+(1-2p)^n}{2}}$

D'où $\boxed{P(A) \geq \frac{1}{2} \iff \frac{1+(1-2p)^n}{2} \geq \frac{1}{2} \iff (1-2p)^n \geq 0}$ $(*)$

Montrons que : $P(A) \geq \frac{1}{2} \iff p \leq \frac{1}{2}$ ou n pair

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $p \leq \frac{1}{2}$ alors $1-2p \geq 0$ d'où $(1-2p)^n \geq 0$ donc $P(A) \geq \frac{1}{2}$

et si n est pair alors, $\forall p \in]0,1[$, $(1-2p)^n \geq 0$ donc $P(A) \geq \frac{1}{2}$

$\boxed{\Rightarrow}$ par contraposée : si $p > \frac{1}{2}$ et n impair

alors $(1-2p)^n < 0$ donc $P(A) < \frac{1}{2}$ (par contraposée de $(*)$)

2) a) $\boxed{G = 10\, X\, Y = 10\, X (-1)^X}$

b) Soit $k \in [\![1,n]\!]$ $k\binom{n}{k} = \frac{k\, n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} = \frac{n \times (n-1)!}{(n-1-(k-1))!\,(k-1)!} = n\binom{n-1}{k-1}$

c) $E(G) \underset{\text{Transfert}}{=} \sum_{k=0}^{n} 10k(-1)^k P(X=k)$

$= \sum_{k=1}^{n} 10k(-1)^k \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

(le 1er terme est nul)

$= 10\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}(-p)^k(1-p)^{n-k} \underset{(2)b)}{=} 10\sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}(-p)^k(1-p)^{n-k}$

$= 10\sum_{k'=0}^{n-1} n\binom{n-1}{k'}(-p)^{k'+1}(1-p)^{n-(k'+1)}$

$(k' = k-1)$

$= 10\, n(-p)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(-p)^k(1-p)^{(n-1)-k} \underset{\text{Binôme}}{=} -10np(-p+(1-p))^{n-1}$

$\boxed{E(G) = -10np(1-2p)^{n-1}}$

d) $\begin{cases} P(A) \geq \frac{1}{2} \\ E(G) < 0 \end{cases} \overset{?}{\iff} p < \frac{1}{2}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $p < \frac{1}{2}$ alors $0 < p < \frac{1}{2}$ donc $1-2p > 0$ et $-p > 0$ donc $E(G) < 0$

et, d'après le 1) e), $P(A) \geq \frac{1}{2}$

$\boxed{\Rightarrow}$ par contraposée : montrons que, si $p \geq \frac{1}{2}$ alors $P(A) < \frac{1}{2}$ ou $E(G)$

- si $p = \frac{1}{2}$ alors $E(G) = 0$
- si $p > \frac{1}{2}$ alors $1-2p < 0$

alors, si n pair $(1-2p)^{n-1} < 0$ (car $n-1$ est impair)

donc $E(G) \geq 0$

puis si n impair $(1-2p)^n < 0$ donc $P(A) < \frac{1}{2}$ (avec $*$)

Exercice 3

1) $Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i$ $\quad X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la boule est blanche au } i^{\text{ème}} \text{ tirage} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Z_p est le nombre de boules blanches tirées après p répétitions de l'épreuve.

2) $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{1}{2})$ car au premier coup, la probabilité de tirer une boule blanche est $\frac{1}{2}$.

$\mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{2}$

3) $Z_2 = X_1 + X_2$

$Z_2(\Omega) = [\![0, 2]\!]$

$$\mathbb{P}(Z_2 = 0) = \mathbb{P}((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)) = \mathbb{P}(X_1 = 0)\,\mathbb{P}_{(X_1=0)}(X_2 = 0) = \frac{1}{2}\,\frac{c+1}{c+2}$$

$$\mathbb{P}(Z_2 = 2) = \mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)) = \mathbb{P}(X_1 = 1)\,\mathbb{P}_{(X_1=1)}(X_2 = 1) = \frac{1}{2}\,\frac{c+1}{c+2}$$

$$\mathbb{P}(Z_2 = 1) = 1 - \mathbb{P}(Z_2 = 0) - \mathbb{P}(Z_2 = 2) = 1 - \frac{c+1}{c+2} = \frac{c+2-c-1}{c+2} = \frac{1}{c+2}$$

4) Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$

a) $Z_p(\Omega) = [\![0, p]\!]$ (nombre de boules blanches possibles après p tirages)

b) $\forall k \in Z_p(\Omega)$, $\quad \mathbb{P}_{(Z_p = k)}(X_{p+1} = 1) = \frac{1+kc}{2+kc+(p-k)c} = \frac{1+kc}{2+pc}$

c) Les événements $(Z_p = k)_{0 \leq k \leq p}$ forment un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{p+1} = 1) &= \sum_{k=0}^{p} \mathbb{P}((Z_p = k) \cap (X_{p+1} = 1)) \\
&= \sum_{k=0}^{p} \mathbb{P}(Z_p = k)\,\mathbb{P}_{(Z_p=k)}(X_{p+1} = 1) \\
&= \sum_{k=0}^{p} \mathbb{P}(Z_p = k)\,\frac{1+kc}{2+pc} \\
&= \frac{1}{2+pc} \underbrace{\sum_{k=0}^{p} \mathbb{P}(Z_p = k)} + \frac{c}{2+pc} \sum_{k=0}^{p} k\,\mathbb{P}(Z_p = k) \\
&= \frac{1}{2+pc} \times 1 + \frac{c}{2+pc}\,\mathbb{E}(Z_p) \\
&= \frac{1 + c\,\mathbb{E}(Z_p)}{2+pc}
\end{aligned}$$

5) On sait que $\forall p \in [\![1, n]\!]$, $X_p(\Omega) = [\![0, 1]\!]$, montrons que $\boxed{\forall p \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(X_p = 1) = \frac{1}{2}}$

Par récurrence forte sur $p \in [\![1, n]\!]$

- $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$
- S'il existe $p \in [\![1, n]\!]$ tel que $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\mathbb{P}(X_{p+1} = 1) = \frac{1 + c\,\mathbb{E}(Z_p)}{2+pc}$

alors $X_{p+1}(\Omega) = [\![0, 1]\!]$ et

or $\mathbb{E}(Z_p) = \mathbb{E}(X_1 + \dots + X_p) = \mathbb{E}(X_1) + \dots + \mathbb{E}(X_p)$ (linéarité de $\mathbb{E}$)

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}$ (car $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{1}{2})$)

$= \frac{p}{2}$

d'où $\mathbb{P}(X_{p+1} = 1) = \frac{1 + c\frac{p}{2}}{2+pc} = \frac{\frac{2+pc}{2}}{2+pc} = \frac{1}{2}$

- Ainsi $\forall p \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(X_p = 1) = \frac{1}{2}$. Donc $X_p \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{1}{2})$.