Exercice 1

$u_0 = 0 \quad u_1 = 1 \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

1) Par récurrence double, montrons que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_{n+2} - u_{n+1} \geq 1$

$u_0 = 0$ $u_1 = 1$ et $u_2 = u_0 + u_1 = 1$

Ainsi $u_3 = u_2 + u_1 = 1 + 1 = 2$ et $u_4 = u_3 + u_2 = 2 + 1 = 3$

donc $\left.\begin{array}{l} u_3 - u_2 = 2 - 1 = 1 \geq 1 \\ u_4 - u_3 = 3 - 2 = 1 \geq 1 \end{array}\right\}$ ainsi la propriété est vraie pour $n = 1$ et pour $n = 2$

S'il existe $n \geq 1$ tel que $\underbrace{u_{n+2} - u_{n+1}}_{} \geq 1$ et $u_{n+3} - u_{n+2} \geq 1$

c'est-à-dire $u_n \geq 1$ et $u_{n+1} \geq 1$

Alors par somme $\underbrace{u_n + u_{n+1}}_{u_{n+2}} \geq 1 + 1 = 2$

donc $u_{n+2} \geq 2 \geq 1$

d'où $u_{n+4} - u_{n+3} \geq 1$ (puisque $u_{n+4} - u_{n+3} = u_{n+2}$)

Ainsi par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_{n+2} - u_{n+1} \geq 1$.

2) $S_n = \sum_{k=1}^{n-2} (u_{k+2} - u_{k+1}) = u_{n-2+2} - u_{1+1}$ (par télescopage)

$= u_n - u_2$

$= u_n - 1$

3) Soit $n \geq 3$ alors $\forall k \in [\![1, n-2]\!]$, $u_{k+2} - u_{k+1} \geq 1$ d'après le 1)

donc $\underbrace{\sum_{k=1}^{n-2} (u_{k+2} - u_{k+1})}_{} \geq \sum_{k=1}^{n-2} 1 = n - 2$

d'où $u_n - 1 \geq n - 2$

donc $u_n \geq n - 1$

Puis, si $n = 0$ $u_0 = 0 \geq 0 - 1$

si $n = 1$ $u_1 = 1 \geq 1 - 1$

si $n = 2$ $u_2 = 1 \geq 2 - 1$

} Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n - 1$

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) \leq n$ et f injective

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n$ (càd $f = Id_{\mathbb{N}}$)

Par récurrence forte :

. Pour $n = 0$ on a $f(0) \leq 0$; or $f(0) \in \mathbb{N}$ donc $f(0) = 0$

. S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, on ait $f(k) = k$

montrons que $f(n+1) = n+1$:

on sait que $f(n+1) \leq n+1$ donc, comme $f(n+1) \in \mathbb{N}$

on a $f(n+1) \in [\![0, n+1]\!]$; or $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $f(k) = k$ donc les valeurs de $[\![0, n]\!]$ sont toutes atteintes une fois par f. Mais f est injective donc elles ne peuvent être atteintes une deuxième fois par f.

Ainsi $f(n+1) = n+1$

. Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n$

Exercice 3

Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et soit (P) : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{f^2(x) + 3x^2} = f(x) + f(1)$

1) Soit (E) : $2a = \sqrt{a^2+3}$

Par analyse-synthèse : si $a \in \mathbb{R}$ est solution de (E) alors $2a = \sqrt{a^2+3}$ donc $4a^2 = a^2 + 3$ d'où $3a^2 = 3$ puis $a^2 = 1$

il s'en suit que $a = 1$ ou $a = -1$

Réciproquement, si $a = 1$ alors $2a = 2 = \sqrt{4} = \sqrt{1^2+3} = \sqrt{a^2+3}$

donc 1 est solution de (E)

Puis, si $a = -1$ alors $2a = -2 \neq \sqrt{4} = \sqrt{(-1)^2+3} = \sqrt{a^2+3}$

donc -1 n'est pas solution de (E)

Ainsi $\mathcal{S}_{(E)} = \{1\}$.

2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

a) on suppose que f vérifie (P) ;

alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{f^2(x) + 3x^2} = f(x) + f(1)$; en particulier, pour $x = 1$

on a : $\sqrt{f^2(1) + 3} = 2f(1)$ donc $f(1)$ vérifie l'équation (E) du 1)

On peut donc affirmer que $f(1) = 1$ (unique solution de (E))

b) Ainsi, si f vérifie (P) alors $f(1) = 1$ et, $\forall x \in \mathbb{R}$ $\sqrt{f^2(x) + 3x^2} = f(x) + 1$

donc $f^2(x) + 3x^2 = (f(x) + 1)^2$ d'où $f^2(x) + 3x^2 = f^2(x) + 2f(x) + 1$

ainsi $2f(x) = 3x^2 - 1$ d'où $f(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

(seule solution envisageable pour le problème (P))

Reciproquement, si on pose, $\forall x\in\mathbb{R}$ $f(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$; on a $f(1)=1$

alors $\forall x\in\mathbb{R}$, $\sqrt{f^2(x)+3x^2} = \sqrt{\frac{1}{4}(3x^2-1)^2+3x^2} = \sqrt{\frac{1}{4}(9x^4+1-6x^2)+3x^2}$

$= \sqrt{\frac{9}{4}x^4+\frac{1}{4}-\frac{3}{2}x^2+3x^2} = \sqrt{\frac{9}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{4}}$

$= \sqrt{\frac{1}{4}(9x^4+6x^2+1)} = \sqrt{\frac{1}{4}(3x^2+1)^2} = \frac{1}{2}(3x^2+1)$

$= f(x)+1$

$= f(x)+f(1)$ donc f vérifie effectivement (P).

donc $\boxed{S_{(P)} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{2}(3x^2-1) \end{array} \right\}}$

Exercice 4 :

$f: \begin{array}{l} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto z(1-z) \end{array}$

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un ROND du plan.

1) On résout dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=\frac{1+i}{4}$ pour trouver les éventuels antécédent de $\frac{1+i}{4}$:

$z(1-z)=\frac{1+i}{4} \iff z-z^2-\frac{1+i}{4}=0 \iff z^2-z+\frac{1+i}{4}=0$

$\Delta = 1-4\times1\times\frac{1+i}{4} = 1-(1+i) = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Soit $\delta = x+iy$, $\delta^2=\Delta \iff \delta^2 = e^{-i\frac{\pi}{2}} \iff \left(\frac{\delta}{e^{-i\frac{\pi}{4}}}\right)^2 = 1 \iff \frac{\delta}{e^{-i\frac{\pi}{4}}} \in \mathbb{U}_2=\{-1,1\}$

$\iff \delta = e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ou $\delta = -e^{-i\frac{\pi}{4}}$

on peut choisir $\delta = e^{-i\frac{\pi}{4}} = \cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2}$

Alors $z=z_1=\dfrac{1-(\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2})}{2} = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt2}{4}+i\frac{\sqrt2}{4} = \frac{2-\sqrt2}{4}+i\frac{\sqrt2}{4}$

ou $z=z_2=\dfrac{1+(\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2})}{2} = \frac{2+\sqrt2}{4}+i\frac{\sqrt2}{4}$

donc $\frac{1+i}{4}$ admet deux antécédents distincts, z_1 et z_2

On peut en déduire que f n'est pas injective.

2) Soient $(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2$

$f(z_1)=f(z_2) \iff z_1(1-z_1)=z_2(1-z_2) \iff z_1-z_1^2-z_2+z_2^2=0$

$\iff (z_1-z_2)-(z_1^2-z_2^2)=0$

$\iff (z_1-z_2)(1-(z_1+z_2))=0$

$\iff z_1=z_2$ ou $1=z_1+z_2$

$\iff z_1=z_2$ ou $\frac{1}{2}=\frac{z_1+z_2}{2}$

$\iff z_1=z_2$ ou $\frac{1}{2}$ est le milieu de $[M_1M_2]$ où $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$

$\iff z_1=z_2$ ou $\frac{1}{2}$

3) Soit $a\in\mathbb{C}$ (ensemble d'arrivée de f)

$z(1-z)=a \iff z-z^2-a=0 \iff z^2-z+a=0$ (E)

$\Delta = 1-4a\in\mathbb{C}$

L'équation (E) admet soit une racine double z_0 (si $\Delta=0$)

Soit deux racines distinctes (si $\Delta\neq0$)

Dans les deux cas, a admet au moins un antécédent par f (dans $\mathbb{C}$).

Donc f est surjective

a admet un unique antécédent si et seulement si $\Delta=0$

c'est-à-dire $4a=1$, d'où $a=\frac{1}{4}$

Seul le nombre $\frac{1}{4}$ admet un unique antécédent dans $\mathbb{C}$

4) Soit $z\in\mathbb{C}$ (ensemble de départ de f)

$z\in f^{-1}(\mathbb{R}) \iff f(z)\in\mathbb{R} \iff z(1-z)\in\mathbb{R}$

$z(1-z)=\bar z(1-\bar z)$

$\iff z-z^2=\bar z-\bar z^2 \iff z-\bar z-(z^2-\bar z^2)=0$

$\iff z-\bar z-(z-\bar z)(z+\bar z)=0$

$\iff (z-\bar z)(1-(z+\bar z))=0 \iff z=\bar z$ ou $z+\bar z=1$

$\iff z\in\mathbb{R}$ ou $2\mathrm{Re}(z)=1 \iff z\in\mathbb{R}$ ou $\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{2}$

donc $f^{-1}(\mathbb{R})$ est la réunion de la droite (Ox) (droite des réels) et de la droite verticale d'éq $x=\frac{1}{2}$.

5) a) Soit $\theta\in\mathbb{R}$

$f(\frac{1}{2}+e^{i\theta}) = (\frac{1}{2}+e^{i\theta})(1-\frac{1}{2}-e^{i\theta}) = (\frac{1}{2}+e^{i\theta})(\frac{1}{2}-e^{i\theta}) = \frac{1}{4}-e^{i2\theta}$

b) Soit Γ le cercle de centre $\frac{1}{2}$ et de rayon 1.

$z\in\Gamma \iff |z-\frac{1}{2}|=1 \iff z-\frac{1}{2}\in\mathbb{U} \iff \exists\theta\in\mathbb{R} \mid z-\frac{1}{2}=e^{i\theta}$

$\iff \exists\theta\in\mathbb{R},\ z=\frac{1}{2}+e^{i\theta}$

Ainsi $f(\Gamma) = \{f(a) \mid a\in\Gamma\} = \{f(\frac{1}{2}+e^{i\theta}) \mid \theta\in\mathbb{R}\}$

$= \{\frac{1}{4}-e^{+i2\theta} \mid \theta\in\mathbb{R}\} = \{\frac{1}{4}+e^{i(2\theta+\pi)} \mid \theta\in\mathbb{R}\}$

On pose Γ', le cercle de centre $\frac{1}{4}$ de rayon 1

$Z\in\Gamma' \iff |Z-\frac{1}{4}|=1 \iff \exists\theta'\in\mathbb{R} \mid Z=\frac{1}{4}+e^{i\theta'}$

or $Z\in f(\Gamma) \iff \exists\theta\in\mathbb{R} \mid Z=\frac{1}{4}+e^{i(2\theta+\pi)}$

on peut poser $\theta'=2\theta+\pi$, $2\theta+\pi$ décrit $\mathbb{R}$ lorsque θ décrit $\mathbb{R}$

donc $f(\Gamma)=\Gamma'$