24.25 Cap ECL1 DS 03 CORRIGÉ

Exercice 1

1) a) Soit $x \in]-1,1[$ arcsin x est défini et $\arcsin x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

donc $\tan(\arcsin x)$ existe

De plus $\tan(\arcsin x) = \dfrac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} \overset{x \in]-1,1[\subseteq [-1,1]}{=} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

b) (F_0) : $(1-x^2)y'(x) + xy(x) = 0 \iff y'(x) = -\dfrac{x}{1-x^2}y(x)$ $\forall x \in]-1,1[$

(car $1-x^2 \neq 0$ $\forall x \in]-1,1[$)

Ici $a(x) = -\dfrac{x}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{-2x}{1-x^2}$

donc $A(x) = \dfrac{1}{2}\ln(|1-x^2|)$ or $\forall x \in]-1,1[$, $1-x^2 > 0$ donc

$A(x) = \dfrac{1}{2}\ln(1-x^2)$

Les solutions de (F_0) sont les fonctions $\boxed{\begin{array}{l}]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto C e^{\frac{1}{2}\ln(1-x^2)} = C\sqrt{1-x^2}, \; C \in \mathbb{R}. \end{array}}$

c) $\displaystyle\int^x \frac{1}{(1-u^2)^{3/2}}\,du = \int^{\arcsin x} \frac{\cos t \, dt}{(1-\sin^2 t)^{3/2}} = \int^{\arcsin x} \frac{\cos t}{(\cos^2 t)^{3/2}}\,dt = \int^{\arcsin x} \frac{\cos t}{\cos^3 t}\,dt$

(on pose $u = \sin t$
$du = \cos t \, dt$
Si $u = x$ alors $\sin t = x$ d'où $t = \arcsin x$)

$\displaystyle = \int^{\arcsin x} \frac{1}{\cos^2 t}\,dt = \int^{\arcsin x} (\tan' t)\,dt =$

$= \tan(\arcsin x) \underset{\text{(d'après 1) a))}}{=} \boxed{\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$

d) Soit $C \in \mathbb{R}$.

(F_C) : $(1-x^2)y'(x) + xy(x) = C$, $\forall x \in]-1,1[$

On a résolue (F_0) qui est l'équation homogène associée à (F_C)

Par variation de la constante :

on pose $f(x) = \lambda(x)\sqrt{1-x^2}$ où $\lambda :]-1,1[\to \mathbb{R}$ est dérivable

f vérifie $(F_C) \iff \forall x \in]-1,1[$, $(1-x^2)\left(\lambda'(x)\sqrt{1-x^2} - \dfrac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}\lambda(x)\right) + \lambda(x)x\sqrt{1-x^2} = C$

$\iff \forall x \in]-1,1[$, $(1-x^2)^{3/2}\lambda'(x) - \lambda(x)x\sqrt{1-x^2} + \lambda(x)x\sqrt{1-x^2} = C$

$\iff \forall x \in]-1,1[$, $\lambda'(x) = \dfrac{C}{(1-x^2)^{3/2}}$

Avec le 1) c) on peut prendre $\boxed{\lambda(x) = C\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$

d'où $\boxed{f(x) = C\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2} = Cx}$

Ainsi, $\mathcal{S}_{(F_C)} = \left\{ \begin{array}{l}]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto D\sqrt{1-x^2} + Cx \end{array}, \; D \in \mathbb{R} \right\}$

e) (G) : $z''(t) + z(t) = \dfrac{\sin(2t)}{2}$

(C) : $x^2 + 1 = 0 \iff x = \pm i$ donc les solutions homogènes sont les fonctions $t \mapsto e^{0t}(A\cos t + B\sin t)$, $(A,B) \in \mathbb{R}^2$

$= A\cos t + B\sin t$

On considère $(G_{\mathbb{C}})$: $z''(t) + z(t) = \dfrac{1}{2}e^{2it}$ ici $m = 2i$ n'est pas solution de (C)

donc on cherche une SP de la forme $t \mapsto \lambda e^{2it}$, $\lambda \in \mathbb{C}$

$t \mapsto \lambda e^{2it}$ vérifie $(G_{\mathbb{C}}) \iff \forall t \in \mathbb{R}$, $\lambda(2i)^2 + \lambda = \dfrac{1}{2} \iff -3\lambda = \dfrac{1}{2} \iff \lambda = -\dfrac{1}{6}$

donc $f_{\mathbb{C}}(t) = -\dfrac{1}{6}e^{2it}$

alors $t \mapsto f(t) = \mathrm{Im}(f_{\mathbb{C}}(t)) = -\dfrac{1}{6}\sin 2t$ est solution particulière de (G)

Ainsi $\boxed{\mathcal{S}_G = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto A\cos t + B\sin t - \frac{1}{6}\sin(2t) \end{array}, \; (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}}.$

2) a) (E_0) : $(1-x^2)y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0$, $\forall x \in]-1,1[$

Soit y 2 fois dérivable sur $]-1,1[= I$. Alors v est dérivable (produit et somme de fonctions dérivables car y' est dérivable sur $]-1,1[$)

on pose, $\forall x \in I$, $v(x) = (1-x^2)y'(x) + xy(x)$

$v'(x) = -2xy'(x) + (1-x^2)y''(x) + y(x) + xy'(x)$

ainsi $v'(x) = (1-x^2)y''(x) - xy'(x) + y(x)$

donc : y vérifie $(E_0) \iff v'(x) = 0$, $\forall x \in I$

$\iff \exists C \in \mathbb{R}$, $\forall x \in I$ $v(x) = C$

$\iff \exists C \in \mathbb{R}$, y vérifie (F_C) (equation du 1) d))

$\iff \exists C \in \mathbb{R}$, $\exists D \in \mathbb{R}$, $y(x) = D\sqrt{1-x^2} + Cx$ $\forall x \in$

(d'après 1) d))

$\boxed{\mathcal{S}_{(E_0)} = \left\{ \begin{array}{l}]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto D\sqrt{1-x^2} + Cx \end{array}, \; (D,C) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$

b) i) Soit $y :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ 2 fois dérivable

on pose : $\forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $z(t) = y(\sin t)$

C'est possible car $\forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\sin t \in]-1,1[$ donc $y(\sin t)$ existe.

$\sin$ est 2 fois dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et y est 2 fois dérivable sur $]-1,1[$ donc, par composition, z est 2 fois dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et :

$z'(t) = \cos t \, y'(\sin t)$

$z''(t) = -\sin t \, y'(\sin t) + \cos^2(t)\, y''(\sin t)$

ii) z est solution de G sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\iff \forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $z''(t) + z(t) = \dfrac{\sin 2t}{2}$

$\iff \forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $-\sin t \, y'(\sin t) + \cos^2(t)\, y''(\sin t) + y(\sin t) = \dfrac{\sin 2t}{2}$

$\iff \forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $-\sin t \, y'(\sin t) + \underbrace{(1-\sin^2 t)}_{\cos^2 t = 1-\sin^2 t} y''(\sin t) + y(\sin t) = \cos t \sin t$

$= \sqrt{1-\sin^2 t}\,\sin t$

(car $|\cos t| = \sqrt{1-\sin^2 t}$ puis $\forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ $\cos t > 0$)

(on pose $x = \sin t$) et $\forall x \in]-1,1[$ $\exists! t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ $|$ $x = \sin t$ (et $t = \arcsin x$)

$\iff \forall x \in]-1,1[$, $-xy'(x) + (1-x^2)y''(x) + y(x) = x\sqrt{1-x^2}$

$\iff y$ vérifie (E) sur $]-1,1[$

iii) Ainsi y vérifie (E) sur $]-1,1[$ $\Leftrightarrow$ z vérifie (G) sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

D'après 1)c) $\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2$, $\forall t \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ $z(t) = A\cos t + B\sin t - \frac{\sin 2t}{6}$

or $y(\sin t) = z(t)$ $\forall t \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ signifie que l'on a posé $x = \sin t$

ou encore $t = \arcsin x$; $z(\arcsin x) = y(x)$, $\forall x \in]-1,1[$

d'où $y(x) = A\cos(\arcsin x) + B\sin(\arcsin x) - \frac{\sin(2\arcsin x)}{6}$

$= A\sqrt{1-x^2} + Bx - \frac{2\sin(\arcsin x)\cos(\arcsin x)}{6}$

$y(x) = A\sqrt{1-x^2} + Bx - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{3}$, $(A,B) \in \mathbb{R}^2$

iv) L'ensemble des solutions est bien de la forme

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{S}_{(E)} = \{ y + f,\ y \in \mathcal{S}_{(E_0)} \text{ et } f \text{ solution particulière de } (E) \} \\ \text{ici } f : x \mapsto -\frac{x\sqrt{1-x^2}}{3} \end{array}}$$

Exercice 2 : $f(x) = 2\arcsin x + \arcsin(1-2x^2)$

1) arcsin est définie sur $[-1,1]$

Or $1-2x^2 \in [-1,1] \Leftrightarrow -2x^2 \in [-2,0] \Leftrightarrow 2x^2 \in [0,2] \Leftrightarrow x^2 \in [0,1]$

$\Leftrightarrow x \in [-1,1]$

donc $D_f = [-1,1]$

2) arcsin est dérivable sur $]-1,1[$

Or $1-2x^2 \in]-1,1[\Leftrightarrow x^2 \in]0,1[\Leftrightarrow x \in]-1,1[\setminus\{0\}$

donc $\underline{\Delta_f =]-1,0[\cup]0,1[}$

3) $\forall x \in \Delta_f$, $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{4x}{\sqrt{1-(1-2x^2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{4x}{\sqrt{1-1-4x^4+4x^2}}$

$= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{4x}{\sqrt{4x^2(1-x^2)}} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$

si $x \in]0,1[$ alors $|x| = x$ et $f'(x) = 0$

si $x \in]-1,0[$ alors $|x| = -x$ et $f'(x) = \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} = 4\arcsin'(x)$

4) f est constante sur l'ouvert $]0,1[$ d'après 3) puisque $f' = 0$ sur $]0,1[$

or $\frac{1}{2} \in]0,1[$ et $f(\frac{1}{2}) = 2\arcsin\frac{1}{2} + \arcsin(1-\frac{1}{2}) = 3\arcsin\frac{1}{2} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

donc $\forall x \in]0,1[$ $f(x) = \frac{\pi}{2}$

Puis f est continue en 0 et en 1 donc $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2} = f(0)$

et

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{\pi}{2} = f(1)$

D'où $\boxed{\forall x \in [0,1],\ f(x) = \frac{\pi}{2}}$

5) $f' = 4\arcsin'$ sur $]-1,0[$

donc $(f - 4\arcsin)' = 0$ sur $]-1,0[$ d'où $\exists C \in \mathbb{R} \mid \forall x \in]-1,0[$ $f(x) = 4\arcsin$

or $f(-\frac{1}{2}) = 2\arcsin(-\frac{1}{2}) + \arcsin(\frac{1}{2}) = -2\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$

donc $-\frac{\pi}{6} = 4\arcsin(-\frac{1}{2}) + C$

d'où $C = -\frac{\pi}{6} - 4(-\frac{\pi}{6}) = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ d'où $\boxed{\begin{array}{l}\forall x \in]-1,0[, \\ f(x) = 4\arcsin x + \frac{\pi}{2}\end{array}}$

Par continuité de f en -1 et en 0

$f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 4\arcsin x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 4\arcsin(0)$

$f(-1) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} 4\arcsin x + \frac{\pi}{2} =$ $4\arcsin(-1) + \frac{\pi}{2}$

6) f est continue et strictement croissante sur $[-1,0]$ (car $x \mapsto \arcsin$ l'est et $f(x) = 4\arcsin x + \frac{\pi}{2}$ $\forall x \in [-1,0]$ donc f l'est aussi)

$f(-1) = 4\arcsin(-1) + \frac{\pi}{2} = -\frac{4\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2} < 0$

$f(0) = \frac{\pi}{2} > 0$

D'après le TVI, $\exists!\ \alpha \in [-1,0]$, $f(\alpha) = 0$

7) $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{6} < 0 = f(\alpha)$ et f strictement croissante sur $[-1,0]$

donc $-\frac{1}{2} < \alpha$.

8) $4\arcsin\alpha + \frac{\pi}{2} = 0$ donc $2\arcsin\alpha = -\frac{\pi}{4}$

donc $\sin(2\arcsin\alpha) = \sin(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; d'où $2\alpha\sqrt{1-\alpha^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

donc $2\sin(\arcsin\alpha)\cos(\arcsin\alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $8\alpha^2 - 8\alpha^4 = 1$

ainsi $4\alpha\sqrt{1-\alpha^2} = -\sqrt{2}$ d'où $16\alpha^2(1-\alpha^2) = 2$

On pose $X = \alpha^2$

$8X^2 - 8X + 1 = 0 \qquad \Delta = 64 - 32 = 32$

$X = \frac{8 - 4\sqrt{2}}{16} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$ ou $X = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$

donc $\alpha^2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$ ou $\alpha^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$

d'où $\alpha = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$ ou $\alpha = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$

(car $\alpha < 0$) (car $\alpha < 0$)

mais $\alpha > -\frac{1}{2}$ donc $-\alpha < \frac{1}{2}$ or $\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2+\sqrt{2}}{4} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow \underbrace{2+\sqrt{2} > 1}_{\text{vrai}}$

et par ailleurs $\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{2}}{4} < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \underbrace{2-\sqrt{2} < 1}_{\text{vrai}}$

donc $\alpha = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{-\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

<u>Exercice 3</u>

1) $f(x) = \arccos(\text{th}\, x) + \arctan(\text{sh}\, x)$

Arctan et sh sont définies (et dérivables) sur $\mathbb{R}$; or arccos est définie et dérivable sur $]-1,1[$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{th}\, x \in]-1,1[$

donc f est définie sur $\mathbb{R}$ (et dérivable) sur $\mathbb{R}$

2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\frac{1-\text{th}^2 x}{\sqrt{1-\text{th}^2 x}} + \frac{\text{ch}\, x}{1+\text{sh}^2 x}$

or $\forall x \in \mathbb{R}$ $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$ donc $1 + \text{sh}^2 x = \text{ch}^2 x$

d'où $f'(x) = -\sqrt{1-\text{th}^2 x} + \frac{\text{ch}\, x}{\text{ch}^2 x} = -\sqrt{\frac{1}{\text{ch}^2 x}} + \frac{1}{\text{ch}\, x}$

$= -\frac{1}{|\text{ch}\, x|} + \frac{1}{\text{ch}\, x}$; $\text{ch} > 0$ sur $\mathbb{R}$

$= -\frac{1}{\text{ch}\, x} + \frac{1}{\text{ch}\, x} = 0$ Donc f est constante sur $\mathbb{R}$.

Or $f(0) = \frac{\pi}{2}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{\pi}{2}$

3) $\text{th}\, x = \frac{5}{13} \Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{5}{13} \Leftrightarrow 13(e^x - e^{-x}) = 5(e^x + e^{-x})$

$\Leftrightarrow 8e^x - 18e^{-x} = 0$

$\Leftrightarrow 4e^x = 9e^{-x}$

$\Leftrightarrow \frac{4}{9} = e^{-2x} \Leftrightarrow -2x = \ln\left(\frac{4}{9}\right)$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right) = -\ln\frac{2}{3} = \ln\frac{3}{2}$

donc $\text{th}\, x = \frac{5}{13} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

4) $f\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \arccos\left(\frac{5}{13}\right) + \arctan\left(\text{sh}\left(\ln\frac{3}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$

or $\text{sh}\left(\ln\frac{3}{2}\right) = \frac{e^{\ln\frac{3}{2}} - e^{-\ln\frac{3}{2}}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{12}$

donc $f\left(\ln\frac{3}{2}\right) = \arccos\left(\frac{5}{13}\right) + \arctan\left(\frac{5}{12}\right) = \frac{\pi}{2}$