Cap ECL 1

DS 04 CORRIGÉ

Exercice 1 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $[1 - f(x)f(y)]f(x+y) = f(x) + f(y)$

1) Premières propriétés de f

a) on prend $x = y = 0$ $\quad [1 - f(0)^2]\, f(0) = f(0) + f(0)$

donc $[1 - f(0)^2]\, f(0) = 2 f(0)$

d'où $f(0)\,[1 - f(0)^2 - 2] = 0$ donc $f(0)\,[-1 - f(0)^2] = 0$

ainsi $f(0) = 0$ $\quad$ (car $-1 - f(0)^2 \leq -1 < 0$)

b) Soit $x \in \mathbb{R}$ alors on prend $y = -x \in \mathbb{R}$

$[1 - f(x) f(-x)]\, f(0) = f(x) + f(-x)$ donne $0 = f(x) + f(-x)$

d'où $f(-x) = -f(x)$; ainsi f est impaire

2) Limite de f en $+\infty$

a) Soit $x \in \mathbb{R}$; on prend $x = y$: On a donc $[1 - f(x)^2]\, f(2x) = f(x) + f(x)$

d'où $[1 - f(x)^2]\; f(2x) = 2 f(x)$

b) Par l'absurde : supposons que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

alors $f(2x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $f(x)^2 \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $[1 - f(x)^2] \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$

puis $[1 - f(x)^2]\, f(2x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$ $\Big\}$ $-\infty \neq +\infty$

mais $2 f(x) \longrightarrow +\infty$ $\quad$ donc c'est absurde vu l'égalité du 2) a)

De même pour $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$, on obtient une contradiction du même ordre.

c) On suppose que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} l$

alors avec le 2) a), $\quad (1 - l^2)\, l = 2l$ $\quad$ (unicité de la limite de $2f(x)$)

d'où $l\,[1 - l^2 - 2] = 0$

donc $l = 0$ $\quad$ (car $-l^2 - 1 \neq 0$, $\forall l \in \mathbb{R}$)

3) Zéros de f :

on pose $S = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$

a) $0 \in S$ puisque $f(0) = 0$

b) Soit $x \in S$ et soit $m \in \mathbb{N}$

on prend $y = mx$ et $x = x$ dans [P]

$[1 - f(x) f(mx)]\; f(mx + x) = f(mx) + f(x)$

or $f(x) = 0$ (car $x \in S$)

donc on a $\quad f(mx + x) = f(mx)$

c'est-à-dire $\quad f((m+1)x) = f(mx)$, $\forall m \in \mathbb{N}$

la suite $(f(mx))_m$ est donc constante ; or $f(x) = 0$ (pour $m = 1$)

donc $\forall m \in \mathbb{N}$, $f(mx) = 0$

ainsi $\forall m \in \mathbb{N}$, $mx \in S$.

c) Soit $x \in S$

on sait que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\quad (1 - f(t)^2)\, f(2t) = 2 f(t)$ (d'après 2).

on prend $t = \frac{x}{2}$

$(1 - f(\frac{x}{2})^2)\; \underbrace{f(x)}_{=0} = 2 f(\frac{x}{2})$

d'où $2 f(\frac{x}{2}) = 0$, puis $f(\frac{x}{2}) = 0$

ainsi $\frac{x}{2} \in S$.

4) Par l'absurde : on suppose que $S = \{0\}$

a) Alors f s'annule seulement en 0 ; or f est continue sur $\mathbb{R}$

Si f changeait de signe sur $]0, +\infty[$, il existerait x_1 et x_2 dans $]0, +\infty[$ tels que $f(x_1) < 0$ et $f(x_2) > 0$

mais alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f prendrait la valeur 0 au moins une fois entre x_1 et x_2, donc c'est impossible

On f ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$, donc f garde un signe strict sur $]0, +\infty[$

Donc f garde un signe

(on a : $f > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $f < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$)

b) On fixe $(x, y) \in\;]0, +\infty[^2$

Dans (P) on remplace x par $-x$

on a : $\quad [1 - f(-x) f(y)]\; f(-x + y) = f(-x) + f(y)$

Mais on a vu que f est impaire donc :

$[1 + f(x) f(y)]\; f(y - x) = -f(x) + f(y)$

Si $f > 0$ sur $]0, +\infty[$ alors $1 + f(x) f(y) > 0$

donc $f(y) - f(x)$ est du signe de $f(y - x)$

Si $f < 0$ sur $]0, +\infty[$ alors $f(x) < 0$, $f(y) < 0$ donc $f(x)f(y) > 0$

donc $1 + f(x) f(y) > 0$

et de nouveau, $f(y) - f(x)$ est du signe de $f(y-x)$

c) Si $f > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$

alors supposons $0 < x < y$

Ainsi $y - x > 0$ donc $f(y - x) > 0$ (car $f > 0$ sur $]0, +\infty[$)

donc $f(y) - f(x) > 0$ (car de même signe que $f(y-x)$ d'après b))

d'où $f(x) < f(y)$

ainsi f conserve l'ordre ; f est croissante strictement sur $]0, +\infty[$

Si $f < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ alors $f(y - x) < 0$ donc $f(x) > f(y)$ et f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$

d) On obtient une contradiction avec le 2) b) et le 2) c)

Si f est croissante alors f a une limite (finie ou infinie) en $+\infty$ (Théorème de la limite monotone). D'après 2) b) ... donc d'après 2) c), c'est 0, or c'est ... $\uparrow$ et $f(0$

Si f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ alors d'après le thm de la limite monotone f a une limite (finie ou infinie) en $+\infty$
D'après 2) b) celle-ci ne peut pas être $-\infty$
donc c'est 0 d'après le 2) c)
et c'est absurde puisque $f(0)=0$ et $f \downarrow$ sur $]0,+\infty[$.

5) a) D'après le 4) $S \neq \{0\}$ donc $\exists\, a \in S \mid a \neq 0$ (et $f(a)=0$)
Mais, si $a<0$ alors $-a>0$ or $f(-a) = -f(a) = 0$
donc dans tous les cas, $\exists\, a>0 \mid a \in S$.

b) Soit $a \in S \cap]0,+\infty[$
Par récurrence, montrons que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{a}{2^n} \in S$

- $\frac{a}{2^0} = a \in S$
- S'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $\frac{a}{2^n}\in S$ alors d'après le 3) c),
$\frac{1}{2}\times\frac{a}{2^n} \in S$ donc $\frac{a}{2^{n+1}} \in S$
- Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{a}{2^n}\in S$

En fin, d'après le 3) b), $\forall m\in\mathbb{N}$, $m\frac{a}{2^n}\in S$
ainsi $\boxed{\forall (n,m)\in\mathbb{N}^2,\ \frac{ma}{2^n}\in S}$

c) Soit $x>0$. $u_n = \frac{a}{2^n} E\left(\frac{2^n x}{a}\right)$, $\forall n\in\mathbb{N}$

$\frac{2^n x}{a} - 1 < E\left(\frac{2^n x}{a}\right) \leq \frac{2^n x}{a}$ (par définition de E)

$n\to\infty$ $x - \frac{a}{2^n} < \frac{a}{2^n}E\left(\frac{2^n x}{a}\right) \leq \frac{2^n x}{a}\times\frac{a}{2^n} = x$

or $2>1$ donc $2^n \to +\infty$ d'où $\frac{a}{2^n}\to 0$ et $x-\frac{a}{2^n}\to x$
par encadrement $u_n \to x$
or $\frac{a}{2^n}\in S$ et $m = E\left(\frac{2^n x}{a}\right)\in\mathbb{N}$ (car $x\geq 0$, $a>0$) donc $u_n\in S$, $\forall n\in\mathbb{N}$ d'après 5) b).
donc $\forall n\in\mathbb{N}$ $f(u_n) = 0$
or f est continue sur $\mathbb{R}$ (donc en x) d'où $f(u_n)\to f(x)$
donc, par unicité de la limite, $0 = f(x)$
d'où $x\in S$

6) Ainsi on a montré que $\forall x\in\mathbb{R}^+$, $x\in S$
Ainsi $\forall x\in\mathbb{R}^+$, $f(x)=0$
or f est impaire, donc $\forall x\in\mathbb{R}^-$, $f(x)=0$
d'où f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
Réciproquement, si $f\equiv 0$ sur $\mathbb{R}$ alors f vérifie (P)
Ainsi $\mathcal{S}_{(P)} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \\ x\longmapsto 0 \end{array} \right\}$

Exercice 2

$$\begin{cases} u_0\in\mathbb{R} \\ u_{n+1} = \sin(u_n), & \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

1) $\forall n\in\mathbb{N}$, $|u_{n+1}| = |\sin(u_n)| \leq 1$ (car $\forall X\in\mathbb{R}$, $|\sin X|\leq 1$)
donc $u_{n+1}\in[-1,1]$
ainsi, $\forall n\geq 1$, $u_n\in[-1,1]$

2) $g(x) = \sin x - x$ $g'(x) = \cos x - 1$ or $\forall x\in[-1,1]$, $g'(x)\leq 0$
et $\cos x - 1 = 0 \iff \cos x = 1 \iff x = 0$

x	-1		0		1
$g'(x)$		$-$	0	$-$	
Δg	$1-\sin 1$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\sin 1 - 1$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

3) Si $u_1 = 0$ alors $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n = 0$ (suite nulle à partir du rang 1)
En effet, par récurrence :
- $u_1 = 0$
- S'il existe $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $u_n = 0$ alors $u_{n+1} = \sin u_n = 0$
- donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $u_n = 0$.

4) On suppose $u_1\in]0,1]$
S'il existe $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $u_n\in]0,1]$ alors, comme la fonction $\sin$ est croissante sur $]0,1]$ on aura $\sin(u_n)\geq \sin$
donc $u_{n+1}\geq 0$; or $u_{n+1}\in[-1,1]$ d'après 1), donc on aura $u_{n+1}\in]0,1]$
Ainsi, par récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $u_n\in]0,1]$
Or $g<0$ sur $]0,1]$ donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sin(u_n) - u_n < 0$
d'où $u_{n+1} - u_n < 0$
ainsi (u_n) est décroissante.
Or (u_n) est minorée (par 0) donc (u_n) converge vers un réel $l\in[0,$
donc $u_{n+1}\to l$
Puis $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sin(u_n) = u_{n+1}$
et $u_{n+1} = \sin(u_n) \longrightarrow \sin(l)$ (sin continue sur $\mathbb{R}$)
d'où $l = \sin l$ d'où $g(l) = 0$ d'où $l = 0$
(d'après le tableau de signe de g du 2))

5) Si $u_1\in[-1,0[$ alors de même, par récurrence on montre que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n\in[-1,0[$ (car $\forall X\in[-1,0[$, $\sin X\in[-1,0[$)
puis g étant positive sur $[-1,0[$ on a (u_n) croissante
Or (u_n) est majorée (par 0) donc (u_n) converge vers $l\in[-1,0]$
d'où $l = \sin l$ et $l = 0$.

Exercice 3 :

$u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{u_1 + \dots + u_n}{n}$

1) On suppose : u croissante et u converge vers $l \in \mathbb{R}$

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_1 + u_2 \dots + u_n + u_{n+1}}{n+1} - \frac{u_1 + \dots + u_n}{n}$$

$$= \frac{n(u_1 + \dots + u_n) + n u_{n+1} - (n+1)(u_1 + \dots + u_n)}{n(n+1)}$$

$$= \frac{n u_{n+1} - (u_1 + \dots + u_n)}{n(n+1)}$$

or u croît donc $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $u_k \leq u_{n+1}$

d'où $u_1 + \dots + u_n \leq u_{n+1} + u_{n+1} \dots + u_{n+1} = n u_{n+1}$

donc $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$ et v est croissante.

On $u_n \to l$ et on vient de montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_1 + \dots + u_n \leq n u_{n+1}$

d'où $v_n \leq u_{n+1}$

mais u étant croissante, on sait que $l = \sup\{u_n, n \in \mathbb{N}^*\}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq u_{n+1} \leq l$

donc v est majorée par l ; v étant croissante, v converge vers l' et $l' \leq l$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{2n} - \dfrac{u_n + v_n}{2} = \dfrac{u_1 + \dots + u_n + u_{n+1} + \dots + u_{2n}}{2n} - \dfrac{u_n + v_n}{2}$

$$= \frac{u_1 + \dots + u_n}{2n} + \frac{u_{n+1} + \dots + u_{2n}}{2n} - \frac{u_n}{2} - \frac{v_n}{2}$$

$$= \frac{v_n}{2} + \frac{u_{n+1} + \dots + u_{2n}}{2n} - \frac{u_n}{2} - \frac{v_n}{2}$$

$$= \frac{u_{n+1} + \dots + u_{2n}}{2n} - \frac{u_n}{2}$$

or $\forall k \in [\![n+1, 2n]\!]$, $u_k \geqslant u_n$ (car u est croissante)

donc $u_{n+1} + \dots + u_{2n} \geqslant \underbrace{(2n - (n+1) + 1)}_{\text{nombre de termes}} u_n = n u_n$

d'où $\dfrac{u_{n+1} + \dots + u_{2n}}{2n} \geqslant \dfrac{u_n}{2}$ et $v_{2n} - \dfrac{u_n + v_n}{2} \geqslant 0$.

c) (v_{2n}) est extraite de (v_n) donc $v_{2n} \longrightarrow l'$ et $\dfrac{u_n + v_n}{2} \longrightarrow \dfrac{l + l'}{2}$

or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{2n} \geqslant \dfrac{u_n + v_n}{2}$

donc, par conservation de l'ordre, $l' \geqslant \dfrac{l + l'}{2}$

d'où $2l' - l' \geqslant l$

donc $l' \geqslant l$

or on avait au 1)a) obtenu $l' \leq l$

d'où $l' = l$

2) On suppose ici que $u_n \to 0$

Soit $\varepsilon > 0$; $\exists N \in \mathbb{N}$ | $\forall n \geqslant N_1$ $|u_n| \leq \varepsilon$

Soit $n \geqslant N_1$, $|v_n| = \left|\dfrac{u_1 + \dots + u_N + u_{N+1} + \dots + u_n}{n}\right| \leq \dfrac{|u_1| + \dots + |u_N|}{n} + \dfrac{|u_{N+1}| + \dots + |u_n|}{n}$

$$\leq \frac{K_N}{n} + \frac{(n - (N+1) + 1)\varepsilon}{n}$$

or K_N est une constante donc $\dfrac{K_N}{n} \to 0$ donc $\exists N \in \mathbb{N}$,