Exercice 1

$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \forall x \neq 0$

1) $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $-x \in \mathbb{R}^*$ et $f(-x) = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x)$ f est paire

2) $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ donc on peut poser $f(0) = 1$; on note f le prolongement.

3) $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sont derivables sur $\mathbb{R}^*$ donc f est derivable sur $\mathbb{R}^*$ par produit.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$ $f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$

4) a) Soit $x \in]0, \pi[$

La fonction sin est continue sur $[0, x]$, derivable sur $]0, x[$

$\exists c \in]0, x[$ | $\sin x - \sin 0 = \cos(c)(x - 0) = x\cos(c)$

donc

or cos est s^t decroissante sur $]0, \pi[$ donc $\cos(x) < \cos(c) < \cos(0)$

d'où $\cos x < \cos(c) < 1$

ainsi, comme $x > 0$, $x\cos x < x\cos(c) < x$

d'où $x\cos x < \sin x < x$

b) Ainsi $\forall x \in]0, \pi[$ $x\cos x - \sin x < 0$

et $x^2 > 0$ donc $\frac{x\cos x - \sin x}{x^2} < 0$ d'où $f'(x) < 0$

Ainsi f est strictement décroissante sur $[0, \pi]$.

5) a) $\frac{\cos x - 1}{x} = \frac{-2\sin^2(\frac{x}{2})}{x}$ (car $\cos x = 1 - 2\sin^2(\frac{x}{2})$)

$= \frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} \times \sin(\frac{x}{2})$ or $\frac{\sin X}{X} \xrightarrow[X\to 0]{} 1$ donc $\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$

et $\sin(\frac{x}{2}) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc par produit $\frac{\cos x - 1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

b) Soit $x > 0$ $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} = \frac{\sin x - x}{x^2}$

D'après 4) a) $\forall x \in]0, \pi[$ $x\cos x - x < \sin x - x < 0$

d'où $\forall x \in]0, \pi[$, $\frac{x\cos x - x}{x^2} < \frac{\sin x - x}{x^2} < 0$

donc $\frac{\cos x - 1}{x} < \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} < 0$

or $\frac{\cos x - 1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc par encadrement $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$

donc f est derivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$

c) . f est paire (donc $\forall x \in]-\pi, 0[$ $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\frac{f(-x) - f(0)}{-x - 0}$ et $-x \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0^+$ donc $\frac{f(-x) - f(0)}{-x - 0} \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0$

d'où $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0$)

or $\mathcal{C}_f$ admet une $\frac{1}{2}$-tangente horizontale à droite au pt d'abscisse 0, donc par symétrie d'axe (Oy), $\mathcal{C}_f$ admet aussi une $\frac{1}{2}$-tangente à gauche en 0

f est derivable à gauche et $f'_g(0) = 0$

Donc f est derivable en 0 et $f'(0) = 0$

6) h est derivable sur $]0, \frac{\pi}{3}]$

et $h'(x) = \frac{x^2\cos x - 2x\sin x}{x^4} = \frac{x\cos x - 2\sin x}{x^3}$

$= \frac{(x\cos x - \sin x) - \sin x}{x^3}$ or d'après 4) a) $x\cos x - \sin x < 0$ $\forall x \in]0, \frac{\pi}{3}]$

puis $-\sin x < 0$ pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{3}]$

donc $(x\cos x - \sin x) - \sin x < 0$ d'où $h'(x) < 0$ sur $]0, \frac{\pi}{3}]$

donc strictement decroissante sur $]0, \frac{\pi}{3}]$.

Ainsi h est continue et strictement decroissante sur $]0, \frac{\pi}{3}]$.

$h(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$ (car $h(x) = \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{x}$ et $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$, $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$)

$h(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{(\frac{\pi}{3})^2}$ or $\sin\frac{\pi}{3} < 1$ puis $\frac{\pi}{3} > 1$ donc $(\frac{\pi}{3})^2 > 1$

donc $\frac{1}{(\pi/3)^2} < 1$

donc par produit de nb positifs, $\frac{\sin\pi/3}{(\pi/3)^2} < 1$

donc $1 \in [h(\frac{\pi}{3}), +\infty[$ et $\exists! \alpha \in]0, \frac{\pi}{3}]$, $h(\alpha) = 1$

7) $C = \frac{\sqrt{3}}{4}$ et $\forall x \in]0, \frac{\pi}{3}[$ $\varphi(x) = x\cos x - \sin x + Cx^2$

φ est derivable et $\varphi'(x) = \cos x - x\sin x - \cos x + 2Cx$

$\varphi'(x) = x(2C - \sin x)$

or $2C = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $0 < x < \frac{\pi}{3}$ donc $0 < \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$

donc $2C - \sin x > 0$ et $x > 0$ d'où $\varphi'(x) > 0$

donc φ est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{3}]$

or $\varphi(0) = 0$ donc $\forall x \in [0, \frac{\pi}{3}]$, $\varphi(x) \geq 0$.

8) $\forall x \in]0, \frac{\pi}{3}]$, $f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\varphi(x) - Cx^2}{x^2} = \frac{\varphi(x)}{x^2} - C$

or $\varphi(x) > 0$ et $\frac{\varphi(x)}{x^2} > 0$ d'où $f'(x) > -C$

Mais on a vu au 4) b) que $\forall x \in]0, \frac{\pi}{3}[$ $f'(x) < 0$

donc $-C < f'(x) < 0$ donc $|f'(0)| < C$

d'où $\forall x \in]0, \frac{\pi}{3}$, $|f'(x)| < C$ puis, $f'(0) = 0$

finalement, $\forall x \in [0, \frac{\pi}{3}]$, $|f'(x)| \leq C$.

9) a) f est strictement décroissante et continue sur $[0, \frac{\pi}{3}]$ (cf 4) b))

donc $f([0, \frac{\pi}{3}]) = [f(\frac{\pi}{3}), f(0)]$

$= [\frac{\sqrt{3}/2}{\frac{\pi}{3}}, 1]$

$= [\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}, 1] \subseteq [0, \frac{\pi}{3}]$ (*)

x	0		$\pi/3$
f'	0	$-$	
Δf	1	$\searrow$	$f(\frac{\pi}{3})$

or $u_0 = 0 \in [0, \frac{\pi}{3}]$

et, si $u_n \in [0, \frac{\pi}{3}]$ alors $f(u_n) \in [0, \frac{\pi}{3}]$ (avec (*))

donc par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, \frac{\pi}{3}]$

b) Comme $|f'| \leq C$ sur $[0, \frac{\pi}{3}]$, f est C-lipschitzienne sur cet intervalle donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $|f(u_n) - f(\alpha)| \leq C|u_n - \alpha|$

Mais $u_{n+1} = f(u_n)$ puis $h(\alpha) = 1 \Leftrightarrow \frac{\sin(\alpha)}{\alpha^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} = \alpha \Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha$

d'où $|u_{n+1} - \alpha| \leq C|u_n - \alpha|$

c) Par récurrence on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq C^n|u_0 - \alpha|$

or $|C| < 1$ donc $C^n \to 0$ d'où $|u_n - \alpha| \to 0$

par encadrement, et $u_n \to \alpha$

<u>Exercice 2</u> $E = \{ f \in \mathcal{C}^\infty(]0,1[, \mathbb{R}) \mid \forall n \in \mathbb{N} \quad f^{(n)} \geq 0 \}$

1) Soient $f, g \in E$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$

a) f et g sont C^∞ sur $]0,1[$ donc $\lambda f + g$ est C^∞ sur $]0,1[$

et $\forall n \in \mathbb{N}$, $(\lambda f + g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + g^{(n)}$

or $f^{(n)} \geq 0$ ($f \in E$) et $\lambda \geq 0$ d'où $\lambda f^{(n)} \geq 0$ puis $g^{(n)} \geq 0$ ($g \in E$)

d'où par somme $\lambda f^{(n)} + g^{(n)} \geq 0$

donc $\lambda f + g \in E$

b) f et g étant C^∞, le produit fg est C^∞ sur $]0,1[$ d'après Leibniz

et $\forall n \in \mathbb{N}$, $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$

or $\forall k \in [\![0, n]\!]$ $f^{(k)} \geq 0$ et $g^{(n-k)} \geq 0$ (car $f \in E$ et $g \in E$)

puis $\binom{n}{k} \geq 0$ d'où $\binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \geq 0$

Ainsi par somme $(fg)^{(n)} \geq 0$ d'où $fg \in E$

2) Soit $f \in E$ et $g = e^f$; $g' = f' e^f = f' g$; | g est C^∞ sur $]0,1[$ car composée de fonctions de classe C^∞ (et exp est C^∞ sur tout $\mathbb{R}$)

Par récurrence forte, montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $g^{(n)} \geq 0$ sur $]0,1[$.

. $g^{(0)} = g = e^f \geq 0$ sur $]0,1[$

. S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $g^{(0)} \geq 0, g^{(1)} \geq 0 \dots$ et $g^{(n)} \geq 0$ sur $]0,1[$

montrons qu'alors $g^{(n+1)}$ l'est :

$g^{(n+1)} = (g')^{(n)} = (f'g)^{(n)}$

or d'après Leibniz. $(f'g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f'^{(k)} g^{(n-k)}$

or $\forall k \in [\![0, n]\!]$ $f'^{(k)} = f^{(k+1)} \geq 0$ (car $f \in E$) et $g^{(n-k)} \geq 0$ (par HR)

donc $\binom{n}{k} f'^{(k)} g^{(n-k)} \geq 0$ et finalement $(f'g)^{(n)} \geq 0$

d'où $g^{(n+1)} \geq 0$

. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $g^{(n)} \geq 0$; donc $g \in E$

3) $g(x) = -1 - \frac{2}{x-1}$

g est C^∞ sur $]0,1[$ (car $x \mapsto x-1$ ne s'annule pas sur cet intervalle)

$g'(x) = -2 \left(\frac{-1}{(x-1)^2} \right)$, $g''(x) = -2 \left(\frac{2}{(x-1)^3} \right)$ ...

on conjecture que $g^{(n)}(x) = -2 \left(\frac{n!(-1)^n}{(x-1)^{n+1}} \right) = 2 \frac{n!(-1)^{n+1}}{(x-1)^{n+1}}$,

$g^{(n)}(x) = 2\, n! \left(\frac{1}{1-x} \right)^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

or $\forall x \in]0,1[$ $1-x > 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $g^{(n)}(x) \geq 0$

Puis $g^{(0)}(x) = g(x) = \frac{-(x-1)-2}{x-1} = \frac{-x+1-2}{x-1} = \frac{-x-1}{x-1} = \frac{x+1}{1-x} > 0$ $\forall x \in]0,1[$

d'où $g \in E$

4) a) $f^{(1)} = f' \geq 0$ sur $]0,1[$ donc f est croissante sur $]0,1[$ (ouvert !)

donc f admet une limite en 0^+ (thm de la limite monotone)

De plus $f \geq 0$ donc f étant minorée, sa limite λ est finie.

b) On pose $f(0) = \lambda$; f est donc continue sur $[0,1[$, dérivable sur $]0,1[$

et, comme $f'' \geq 0$, f' est croissante donc f' admet une limite en 0^+

puis $f' \geq 0$ donc sa limite ℓ est finie ; D'après la ... ≥ 0 en 0^+ (et $f'_d(0) = \ell$)

c) Par récurrence :

. f est $\mathcal{C}^1$ à droite en 0 d'après le 4) b).

. Si f est $\mathcal{C}^n$ à droite en 0 pour un entier naturel n non nul et si $f_d^{(n)}(0) \geq 0$

comme f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,1[$,

appliquons le théorème de la limite de la dérivée à $f^{(n)}$

. $f^{(n)}$ est continue sur $[0,1[$

$f^{(n)}$ est dérivable sur $]0,1[$

or $f^{(n+1)} = (f^{(n)})' \geq 0$ sur $]0,1[$ (car $f \in E$) donc $f^{(n)}$ est croissante sur $]0,1[$ et elle admet une limite à droite en 0 (thm de la limite monotone). Or $f^{(n)} \geq 0$ sur $]0,1[$ donc sa limite en 0^+ est <u>finie</u> et $\geq$ (et sa dérivée est continue en 0.)

donc $f^{(n)}$ est dérivable à droite en 0 et de plus $f_d^{(n+1)}(0) \geq 0$

Ainsi f est C^{n+1} à droite en 0 et $f_d^{(n+1)}(0) \geq 0$

. par récurrence, f est C^∞ en 0 à droite. et $f_d^{(n)}(0) \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

d) On ne peut pas raisonner de la même façon en 1^- ; le thm de la limite monotone donne l'existence d'une limite (finie ou infinie) en 1^- mais on n'a pas l'assurance d'une limite finie.

Par exple : la fonction $g(x) = -1 - \frac{2}{x-1}$ du 3)

$g \in E$ mais $\lim_{x \to 1^-} g(x) = +\infty$

g n'est pas prolongeable par continuité en 1^-.