Exercice 2

1) **Premier exemple**

a) $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y+z$ et $y - z = 0\}$ or $\begin{cases} x = y+z \\ y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2z \\ y = z \end{cases}$

donc $F = \{(2z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((2,1,1))$

on pose $f = (2,1,1)$ $\quad f \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ donc (f) est libre ; c'est une base de F

$G = \{(2a, -a, a) \mid a \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((2,-1,1))$ donc on pose $g = (2,-1,1)$

$g \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ donc (g) est libre et forme une base de G

b) $f+g = (4, 0, 2)$, prenons $h = (0,0,1) \in \mathbb{R}^3$

Montrons que $\mathcal{B} = (f, f+g, h)$ est libre :

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \mid \alpha f + \beta(f+g) + \gamma h = 0$

alors $\alpha(2,1,1) + \beta(4,0,2) + \gamma(0,0,1) = (0,0,0)$

donc $\begin{cases} 2\alpha + 4\beta = 0 \\ \alpha + 0 = 0 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$ ainsi $\mathcal{B}$ est libre.

Or card $\mathcal{B} = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$

c) On pose $K = \mathrm{Vect}((f+g, h))$ (sont deux vecteurs non colinéaires)

$(f+g, h)$ est libre (car $f+g$ et h sont deux vecteurs non colinéaires)

donc forme une base de K.

Or d'après le 1) b), la concaténation des base (f) de F et $(f+g, h)$ de K

forme une base de $\mathbb{R}^3$, donc $F \oplus K = \mathbb{R}^3 = E$

Montrons que $(g, f+g, h)$ est une base de $\mathbb{R}^3$:

Montrons que $(g, f+g, h)$ est libre

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha g + \beta(f+g) + \gamma h = 0_{\mathbb{R}^3}$

alors $\begin{cases} 2\alpha + 4\beta = 0 \\ -\alpha = 0 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$ donc $\mathcal{B}' = (g, f+g, h)$ est libre

or card $\mathcal{B}' = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

donc $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$

Or (g) est une base de G et $(f+g, h)$ base de K

ainsi $G \oplus K = E$.

2) **2e exemple**

a) $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x = y+z\} = \{(x, y, 2x - y) \mid (y,x) \in \mathbb{R}^2\}$

$F = \mathrm{Vect}(\underbrace{(1,0,2)}_{u}, \underbrace{(0,1,-1)}_{v})$ or u et v sont deux vecteurs non colinéaires

donc (u,v) est libre. c'est une base de F (et $\dim F = 2$)

$G = \{(a, b-a, a+2b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}((\underbrace{(1,-1,1)}_{u'}, \underbrace{(0,1,2)}_{v'}))$

or (u', v') est libre (2 vecteurs non colinéaires)

ainsi (u', v') est une base de G (et $\dim G = 2$)

b) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \in F \cap G \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y,z) = (a, b-a, a+2b)$ et $2x = y+z$

$\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} x = a \\ y = b-a \\ z = a+2b \\ 2x = y+z \end{cases} \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} x = a \\ y = b-a \\ z = a+2b \\ 2a = 3b \iff a = \frac{3}{2}b \end{cases}$

$\iff \exists b \in \mathbb{R} \mid \begin{cases} x = \frac{3}{2}b \\ y = -\frac{1}{2}b \\ z = \frac{7}{2}b \end{cases}$ donc $F \cap G = \{b(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{7}{2}) \mid b \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((3,-1,7))$

On pose $e = (3,-1,7)$ $\quad (e)$ est libre, c'est une base de $F \cap G$.

c) On sait que $e \in F$ et que $\dim F = 2$; il suffit de prendre un vecteur de F non colinéaire à e pour former une base de F.

prenons $f = (1,0,2) = u$

(e, f) est libre et forme une base de F [card $(e,f) = 2 = \dim F$]

De même, $e \in G$ et $\dim G = 2$ donc on peut prendre $g = (1,-1,1) = u'$

(e, g) est libre (2 vecteurs de G non colinéaires)

On a alors : (e, g) est libre et card $(e,g) = 2 = \dim G$ donc (e, g) est une base de G.

d) On pose $K = \mathrm{Vect}(f+g)$

Soit $\mathcal{F} = (e, f, f+g)$; card $\mathcal{F} = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ donc il suffit pour pouvoir dire que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}$ de montrer que $\mathcal{F}$ est libre

Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$\alpha e + \beta f + \gamma(f+g) = \alpha(3,-1,7) + \beta(1,0,2) + \gamma(2,-1,3) = (0,0,0)$

$= \begin{cases} 3\alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ -\alpha - \gamma = 0 \\ 7\alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta - \gamma = 0 \\ \alpha = -\gamma \\ -4\gamma + 2\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \gamma \\ \alpha = -\gamma \\ \beta = 2\gamma \end{cases} \iff \begin{cases} \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$

donc $\mathcal{F}$ est libre ; $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$

Or $(f+g)$ est une base de K (1 seul vecteur non nul) et (e,f) base de F

ainsi on peut dire que $F \oplus K = E$

De même ; montrons que $\mathcal{F}' = (e, g, f+g)$ est une base de $\mathbb{R}^3$

card $\mathcal{F}' = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ donc il suffit de montrer que $\mathcal{F}'$ est libre

Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha e + \beta g + \gamma(f+g) = 0_E$

alors $\alpha(3,-1,7) + \beta(1,-1,1) + \gamma(2,-1,3) = (0,0,0)$

d'où $\begin{cases} 3\alpha + \beta + 2\gamma = 0 & L_1 \\ -\alpha - \beta - \gamma = 0 & L_2 \\ 7\alpha + \beta + 3\gamma = 0 & L_3 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 & L_2 \\ 3\alpha + \beta + 2\gamma = 0 & L_1 \\ 7\alpha + \beta + 3\gamma = 0 \end{cases}$

d'où $\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 & L_1 \\ -2\beta - \gamma = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ -6\beta - 4\gamma = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -2\beta - \gamma = 0 \\ -\gamma = 0 \end{cases}$ $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$ $\iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$

ainsi $\mathcal{F}'$ est libre ; c'est une base de $\mathbb{R}^3$

Or (e, g) base de G et $(f+g)$ base de K

donc $G \oplus K = \mathbb{R}^3$.

3) **Cas général**

a) $(e_1, \dots, e_k)$ est libre puisque c'est une base de $F \cap G$; on peut donc la compléter (dans F) en une base de F (en prenant $p - k$ vecteurs de F)

Donc il existe $f_{k+1}, \dots, f_p$ vecteurs dans F tels que $(e_1, \dots, e_k, f_{k+1}, \dots, f_p)$ base de F

(Théorème de la base incomplète dans F, de dimension p)

De même $(e_1, \dots, e_k)$ est libre et peut être complétée en une base de G

Comme $\dim G = p$, on ajoute $p - k$ vecteurs ; soit $(g_{k+1}, \dots, g_p)$ ceux-ci.

b) Soit H tel que $H \oplus (F+G) = E$; mais $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$

$= p + p - k$

Alors $\dim H + \dim(F+G) = n = \dim E$

d'où $\dim H = n - \dim(F+G) = n - 2p + k$

c) $B = (\underbrace{e_1, \dots, e_k, f_{k+1}, \dots, f_p}_{p \text{ vecteur}}, \underbrace{f_{k+1}+g_{k+1}, f_{k+2}+g_{k+2}, \dots, f_p+g_p}_{p-k \text{ vecteurs}}, \underbrace{h_1, \dots, h_n}_{n \text{ vecteurs}})$

donc $\operatorname{card} B = p + (p-k) + n = 2p - k + (n-2p+k) = n$.

Ainsi $\operatorname{card} B = n = \dim E$

Il suffit de montrer que B est libre :

Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_{k+1}, \dots, \beta_p, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ n réels tels que

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i + \sum_{i=k+1}^{p} \beta_i (f_i+g_i)}_{\in F+G} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \gamma_i h_i}_{\in H} = 0_E$$

or $(F+G) \oplus H = E$ donc par unicité de la décomposition de 0_E on a : $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i + \sum_{i=k+1}^{p} \beta_i (f_i+g_i) = 0_E$ et $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i h_i = 0_E$

mais $(h_1, \dots, h_n)$ est libre (base de H) donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $\gamma_i = 0$

puis la famille $B_F = (e_1, \dots, e_k, f_{k+1}, \dots f_p)$ base de F

$B_G = (e_1, \dots, e_k, g_{k+1}, \dots g_p)$ — G

$(e_1, \dots, e_k)$ base de $F \cap G$

or on a : $\underbrace{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i + \sum_{i=k+1}^{p} \beta_i f_i}_{X \in F} = \underbrace{-\sum_{i=k+1}^{p} \beta_i g_i}_{X \in G}$

d'où $X \in F \cap G$ ainsi $X = \sum_{i=1}^{k} \mu_i e_i$ avec $(\mu_1, \dots, \mu_k) \in \mathbb{R}^k$

mais alors $-\sum_{i=k+1}^{p} \beta_i g_i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i e_i$

et comme B_G est libre on en déduit que

$\forall i \in [\![k+1, p]\!]$, $\beta_i = 0$

et $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $\mu_i = 0$

d'où $X = 0_E$

d'où $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i + \sum_{i=k+1}^{p} \beta_i f_i = 0_E$

mais comme B_F est libre on en conclut $\forall i \in [\![1, k]\!]$ $\alpha_i = 0$ et $\forall i \in [\![k+1, p]\!]$, $\beta_i = 0$

donc B est libre.

d) Il suffit de voir que $B = (B_F, B_K)$

or $K = \operatorname{Vect}(\underbrace{f_{k+1}+g_{k+1}, \dots, f_p+g_p, h_1, \dots h_n}_{B_K}) = \operatorname{Vect}(B_K)$

et B_K est libre car c'est une sous-famille de B qui est libre.

Ainsi B_K est une base de K

Or B est la concaténation de B_F et B_K et forme une base de E

donc $F \oplus K = E$.

Remarque : On peut répondre à la question 3)c) de cette autre façon :

$B = (e_1, \dots, e_k, f_{k+1}, f_{k+2}, \dots, f_p, f_{k+1}+g_{k+1}, f_{k+2}+g_{k+2}, \dots, f_p+g_p, h_1, \dots h_n)$

. $\operatorname{card} B = p + (p-k) + n = 2p + n - k = 2p + (n-2p+k) - k = n = \dim E$

. Il suffit de montrer que B est génératrice de E pour que ce soit une base

On sait que $(F+G) \oplus H = E$ (d'après 3) b)) ; Soit $x \in E$

donc $\exists (f, g, h) \in F \times G \times H \mid x = (f+g) + h$

puis $B_F = (e_1, \dots, e_k, f_{k+1}, \dots, f_p)$ est une base de F donc

$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \mid f = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k + \lambda_{k+1} f_{k+1}, \dots + \lambda_p f_p$

et $B_G = (e_1, \dots, e_k, g_{k+1}, \dots, g_p)$ est une base de G donc

$\exists (\mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{K}^p \mid g = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_k e_k + \mu_{k+1} g_{k+1} + \dots + \mu_p g_p$

et enfin $(h_1, \dots, h_n)$ est une base de H donc

$\exists (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{K}^n \mid h = \gamma_1 h_1 + \dots + \gamma_n h_n$

Ainsi $x = f + g + h = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i + \sum_{j=k+1}^{p} \lambda_j f_j + \sum_{i=1}^{k} \mu_i e_i + \sum_{j=k+1}^{p} \mu_j g_j + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i h_i$

$$x = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + \mu_i) e_i + \sum_{j=k+1}^{p} \lambda_j f_j + \underbrace{\sum_{j=k+1}^{p} \mu_j g_j}_{= \sum_{j=k+1}^{p} \mu_j (g_j + f_j) - \sum_{j=k+1}^{p} \mu_j f_j} + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i h_i$$

donc $x = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + \mu_i) e_i + \sum_{j=k+1}^{p} (\lambda_j - \mu_j) f_j + \sum_{j=k+1}^{p} \mu_j (g_j + f_j) + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i h_i$

d'où $x \in \operatorname{Vect}(B)$

ainsi $E \subseteq \operatorname{Vect}(B)$

mais $\operatorname{Vect}(B) \subseteq E$ (car B est une famille de vecteurs de E)

ainsi $\operatorname{Vect}(B) = E$

et B est génératrice de E.

Exercice 2 :

1) $\dfrac{P(x)}{4x^5} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$ donc $P(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} 4x^5$ donc $\deg P = 5$ et le coef dominant de P vaut 4

Ainsi $P(x) = 4 (x^2+1)(x+1)(x-\frac{1}{2})^2$

2) Ce n'est pas : . la courbe 1 car elle s'annule en 1 et non P

. la courbe 2 car il y a une racine double en -1 (tgte horizontale) or $P'(-1) \neq 0$.

. la courbe 3 car la fonction représentée ne s'annule pas en

. la courbe 5 car $P(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ or la courbe 5 représente une fonction de limite $-\infty$ en

. la courbe 6 car la f° représentée s'annule 4 fois sur $\mathbb{R}$ or P n'a que 2 zéros réels.

C'est la courbe 4

3) $\deg P = 5$ donc $\deg P' = 4$ donc P' s'annule au plus 4 fois dans $\mathbb{R}$

or sur la courbe 7, il y a 6 tgtes horizontales donc 6 zéros