Exercice 1

1) a) Etude en 0

arctan est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et exp également donc par composition, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et, d'après Taylor Young, f admet un DL à tout ordre n et en tout point x de $\mathbb{R}$.

b) $\arctan' x = \dfrac{1}{1+x^2}$ or $\dfrac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + o(x^2)$

d'où par intégration $\arctan x = \arctan 0 + x - \dfrac{x^3}{3} \underset{x\to 0}{+ o(x^3)}$

$f(x) \underset{x\to 0}{=} e^{x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)}$ or $e^u = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{6} \underset{u\to 0}{+ o(u^3)}$

ici $u(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$ $\quad u^2(x) = x^2 + o(x^3)$ $\quad u^3(x) = x^3 + o(x^3)$

d'où $f(x) = 1 + \left(x - \dfrac{x^3}{3}\right) + \dfrac{1}{2}(x^2) + \dfrac{1}{6}(x^3) + o(x^3)$

$$\boxed{f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}$$

c) Soit $x \in \mathbb{R}$; $(1+x^2) f'(x) = (1+x^2)\left(\dfrac{1}{1+x^2} e^{\arctan x}\right) = e^{\arctan x} = f(x)$

Soit $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = \left((1+x^2) f'(x)\right)^{(n)} \underset{\text{Leibniz}}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1+x^2)^{(k)} f'^{(n-k)}(x)$

mais $\forall k \geq 3$ $(1+x^2)^{(k)} = 0$ sur $\mathbb{R}$ (car $x \mapsto 1+x^2$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto f'(x)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$)

donc $\forall n \geq 2$ $f^{(n)}(x) = \binom{n}{0}(1+x^2) f'^{(n)}(x) + \binom{n}{1} 2x f'^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2} 2 f'^{(n-2)}(x) + 0$

ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = (1+x^2) f^{(n+1)}(x) + 2n x f^{(n)}(x) + \dfrac{n(n-1)}{2} \times 2 f^{(n-1)}(x)$, $\forall n \geq 2$

donc $0 = (1+x^2) f^{(n+1)}(x) + (2nx - 1) f^{(n)}(x) + n(n-1) f^{(n-1)}(x)$, $\forall n \geq 2$ (et valable aussi pour $n = 1$)

d) avec $x = 0$ il vient,

$0 = f^{(n+1)}(0) + (-1) f^{(n)}(0) + n(n-1) f^{(n-1)}(0)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

or d'après la formule de Taylor-Young en $a = 0$,

$\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$

en divisant les deux membres par $n!$ il vient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$0 = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n!} - \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + n(n-1)\frac{f^{(n-1)}(0)}{n(n-1)!}$$

$$0 = (n+1) a_{n+1} - a_n + (n-1) a_{n-1}$$

d'où $\boxed{a_n = (n+1) a_{n+1} + (n-1) a_{n-1}}$

2) Etude en 1

On pose $x = 1 + h$ avec $h \to 0$

$f(1+h) = \exp(\arctan(1+h))$ or $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ donc $\arctan'(1) = \dfrac{1}{2}$

$\arctan''(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$ d'où $\arctan''(1) = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$

ainsi $\arctan(1+h) \underset{\substack{\text{(Taylor Young} \\ \text{en } a = 1)}}{=} \arctan(1) + \arctan'(1) h + \dfrac{\arctan''(1)}{2!} h^2 \underset{h\to 0}{+ o(h^2)}$

$\arctan(1+h) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}h - \dfrac{1}{4}h^2 \underset{h\to 0}{+ o(h^2)}$

ainsi, $f(1+h) = e^{\frac{\pi}{4}} \times e^{\frac{1}{2}h - \frac{1}{4}h^2 + o(h^2)}$ (avec $h\to 0$)

on pose $u(h) = \dfrac{1}{2}h - \dfrac{1}{4}h^2 \underset{h\to 0}{+ o(h^2)}$ et $e^u = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} \underset{u\to 0}{+ o(u^2)}$

ici $u(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$

donc $f(1+h) = e^{\frac{\pi}{4}}\left(1 + \left(\dfrac{1}{2}h - \dfrac{1}{4}h^2\right) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4}h^2\right) \underset{h\to 0}{+ o(h^2)}\right)$

$f(1+h) = e^{\frac{\pi}{4}}\left(1 + \dfrac{1}{2}h - \dfrac{1}{8}h^2 + o(h^2)\right)$

ainsi $f(x) \underset{x\to 1}{=} e^{\frac{\pi}{4}} + \dfrac{e^{\frac{\pi}{4}}}{2}(x-1) + \left(-\dfrac{1}{8}\right)e^{\frac{\pi}{4}}(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right)$

$T_1 : y = e^{\frac{\pi}{4}} + \dfrac{e^{\frac{\pi}{4}}}{2}(x-1)$

$f(x) - \left(e^{\pi/4} + \dfrac{e^{\pi/4}}{2}(x-1)\right) \underset{x\to 1}{\sim} -\dfrac{1}{8}e^{\frac{\pi}{4}}(x-1)^2 \leq 0$ donc $\mathcal{C}$ est en-dessous de T_1 au voisinage de 1

3) $f(x) = e^{\arctan x}$

or $\forall x > 0$ $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$

donc $\forall x > 0$ $f(x) = e^{\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x}} = e^{\frac{\pi}{2}} \times e^{-\arctan\frac{1}{x}}$

or $\arctan u \underset{u\to 0}{=} u - \dfrac{u^3}{3} + o(u^3)$ d'après le 1) b)

$\dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $-\arctan\dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{=} -\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{3x^3} + o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)\right)$ et ici $-\arctan\dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

puis $e^u = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{6} \underset{u\to 0}{+ o(u^3)}$

d'où $e^{-\arctan\frac{1}{x}} = 1 + \left(-\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3x^3}\right) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x^2}\right) + \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{-1}{x^3}\right) + o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$

$e^{-\arctan\frac{1}{x}} = 1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{x^3}\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{6}\right) + o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$

donc $f(x) = e^{\frac{\pi}{2}}\left(1 - \dfrac{1}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$

$D : y = e^{\pi/2}$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$

et $f(x) - e^{\pi/2} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{x}e^{\pi/2} < 0$ donc $\mathcal{C}$ est en-dessous de D au voisinage de $+\infty$.

Exercice 3

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\quad (E_n) : \ e^x = n - x$

1) On pose $f_n(x) = e^x + x - n$ où $n \in \mathbb{N}^*$

f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $f_n'(x) = e^x + 1 > 0$ donc f_n est strictement croissante ; Ainsi f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}+$ donc f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}+$ sur son image $f_n(\mathbb{R}+)$. On $f_n(0) = 1 - n \leq 0$ (car $n \in \mathbb{N}^*$)

et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$ donc $0 \in f_n(\mathbb{R}+) = [1-n, +\infty[$

Ainsi $\exists! \, x_n \in \mathbb{R}+ \mid f_n(x_n) = 0$ càd $\exists! \, x_n \in \mathbb{R}+ \mid e^{x_n} = n - x_n$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$; $f_{n+1}(x_n) = e^{x_n} + x_n - n - 1$ or $f_n(x_n) = 0 \iff e^{x_n} = n - x_n \iff e^{x_n} + x_n - n = 0$

donc $f_{n+1}(x_n) = -1 < 0$

ainsi $f_{n+1}(x_n) < 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$ donc, par stricte croissance de f_{n+1} sur $\mathbb{R}+$,

on en déduit $x_n < x_{n+1}$; ainsi (x_n) est croissante.

D'après le théorème de la limite monotone, (x_n) admet une limite : soit $+\infty$, soit $l \in \mathbb{R}+$.

Par l'absurde : si $x_n \longrightarrow l \in \mathbb{R}+$ alors $e^{x_n} + x_n \longrightarrow e^l + l$

mais $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $e^{x_n} + x_n = n$ et $n \longrightarrow +\infty$ or $e^l + l \neq +\infty$ donc c'est contradictoire. Ainsi $\boxed{x_n \longrightarrow +\infty}$

3) $\boxed{x_n \to +\infty}$ alors $\boxed{\dfrac{x_n}{e^{x_n}} \longrightarrow 0}$ donc $\boxed{x_n = o(e^{x_n})}$; mais $e^{x_n} + x_n = n$

donc on a $e^{x_n} + o(e^{x_n}) = n$ d'où $e^{x_n} \sim n$

puis $\boxed{e^{x_n} = n + o(n)}$ d'où $x_n = \ln(n + o(n)) = \ln(n(1 + o(1)))$

$x_n = \ln n + \underbrace{\ln(1 + o(1))}_{o(1) \text{ donc } o(\ln n)}$

donc $x_n = \ln n + o(\ln n)$

et $x_n \sim \ln n$

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$; $e^{x_n} = n - x_n$

donc $x_n = \ln(n - x_n) = \ln\left(n\left(1 - \frac{x_n}{n}\right)\right) = \ln n + \ln\left(1 - \frac{x_n}{n}\right)$

5) Ainsi $x_n = \ln n + o(\ln n)$ avec le 3)

et, avec le 4), $x_n = \ln n + \ln\left(1 - \frac{x_n}{n}\right) = \ln n + \ln\left(1 - \frac{\ln n + o(\ln n)}{n}\right)$

$= \ln n + \ln\left(1 - \underbrace{\left(\frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)}_{\to 0}\right)$

or $\ln(1 - u) \underset{u \to 0}{=} -u + o(u)$

donc $x_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$

6) On repart de $x_n = \ln(n - x_n) = \ln\left(n - \ln n + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)$

$= \ln n + \ln\left(1 - \underbrace{\frac{\ln n}{n} + \frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)}_{u_n = \frac{\ln n}{n} - \frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \longrightarrow 0}\right)$

et $\ln(1 - u) \underset{u \to 0}{=} -u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$

donc $\ln(1 - u_n) = -\frac{\ln n}{n} + \frac{\ln n}{n^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right) + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$

$= -\frac{\ln n}{n} + \frac{\ln n}{n^2} - \frac{1}{2}\frac{\ln^2 n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$

donc

$x_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} + \frac{\ln n}{n^2} - \frac{1}{2}\frac{\ln^2 n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$

Exercice 2

$f(x) = \dfrac{\sqrt{4 + x^2}\,\ln(1 + \operatorname{sh} x)}{x}$

1) $\sqrt{4+x^2} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \sqrt{4} = 2$ donc $\sqrt{4+x^2} \underset{x \to 0}{\sim} 2$; $\operatorname{sh} x \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ donc $\ln(1 + \operatorname{sh} x) \underset{x \to 0}{\sim} \operatorname{sh} x \underset{x \to 0}{\sim} x$

ainsi $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{2x}{x} = 2$ d'où $f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 2$; on peut poser $f(0) = 2$

2) Cherchons un DL de f en 0 :

$\sqrt{4+x^2} = \sqrt{4\left(1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2\right)} = 2\sqrt{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} = 2\left(1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2\right)^{1/2}$.

or $\frac{x}{2} \longrightarrow 0$ et $(1+u)^{1/2} \underset{u \to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}u + o(u)$ d'où $2\left(1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2\right)^{1/2} = 2\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + o(x^2)\right)$

$\operatorname{sh} x \underset{x \to 0}{=} x + o(x^2)$ et $\ln(1+u) \underset{u \to 0}{=} u - \frac{1}{2}u^2 + o(u^2)$ donc $\ln(1 + \operatorname{sh} x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

ainsi $f(x) = \dfrac{2\left(1 + \frac{1}{8}x^2\right)\left(x - \frac{1}{2}x^2\right) + o(x^2)}{x} = \dfrac{2\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x} = \dfrac{2x - x^2 + o(x^2)}{x}$

alors $f(x) = 2 - x + \underset{x \to 0}{o}(x)$ $\quad f$ admet un $DL_1(0)$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -1$

3) $e^{-x} \times x = \frac{x}{e^x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $e^{-x} \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$

4) $\ln(1 + \operatorname{sh} x) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}\right) = \ln\left(1 + \frac{e^x}{2} \underset{x \to +\infty}{+ o}(1)\right)$

$= \ln\left(1 + \frac{1}{2}e^x + o(e^{-x})\right)$

$= \ln\left(e^x\left(e^{-x} + \frac{1}{2} \underset{x \to +\infty}{+} e^{-x} + o(e^{-x})\right)\right)$

$= x + \ln\left(\frac{1}{2} + e^{-x} \underset{x \to +\infty}{+ o}(e^{-x})\right)$

$= x + \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \underbrace{2e^{-x} \underset{x \to +\infty}{+ o}(e^{-x})}_{\downarrow x \to +\infty \ 0}\right)$

$= x + \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \underbrace{2e^{-x} + o(e^{-x})}$

$= x - \ln 2 + o\left(\frac{1}{x}\right)$

$= x - \ln 2 \underset{x \to +\infty}{+} o\left(\frac{1}{x}\right)$

5) Ainsi $\forall x > 0$ $f(x) = \dfrac{\sqrt{4+x^2}\left(x - \ln 2 + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{x} = \frac{|x|}{x}\sqrt{\frac{4}{x^2} + 1}\left(x - \ln 2 + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

$= \sqrt{1 + \left(\frac{2}{x}\right)^2}\left(x - \ln 2 + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

or $\left(\frac{2}{x}\right)^2 \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\sqrt{1+u} \underset{u \to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}u + o(u)$

donc $\sqrt{1 + \left(\frac{2}{x}\right)^2} \underset{x \to +\infty}{=} 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

d'où $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} \left(1 + \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\left(x - \ln 2 + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

$\underset{x \to +\infty}{=} x - \ln 2 + \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

donc $f(x) - (x - \ln 2) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{2}{x}$ et $\frac{2}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\frac{2}{x} > 0$

donc $\Delta : y = x - \ln 2$ est asymptote à C_f en $+\infty$ et

donc C_f est au-dessus de Δ au voisinage de $+\infty$.