Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue solution de (H) : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x) = \int_0^{ax} f(t)\,dt$

a) f est continue sur $\mathbb{R}$ et $x\mapsto ax$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ donc $x\mapsto \int_0^{ax} f(t)\,dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (d'après le théorème fondamental) et sa dérivée est $x\mapsto a f(ax)$

Ainsi, comme $f(x)=\int_0^{ax} f(t)\,dt$ $\forall x\in\mathbb{R}$, on peut affirmer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = a f(ax)$ 2

b) Par récurrence sur n, montrons que $\forall n\in\mathbb{N}$, f est C^n et $f^{(n)}(x) = a^{\frac{n(n+1)}{2}} f(a^n x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

- Pour $n=0$ f est C^0 et $a^0 f(a^0x) = f(x)$. et la propriété est initialisée
- S'il existe $n\in\mathbb{N}$, f est C^n et $f^{(n)}(x) = a^{\frac{n(n+1)}{2}} f(a^n x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$

alors $f^{(n)}$ est dérivable car $x\mapsto a^n x$ l'est sur $\mathbb{R}$ et f est dérivable sur $\mathbb{R}$

donc $f^{(n+1)}(x) = a^{\frac{n(n+1)}{2}} \times a^n f'(a^n x)$ (dérivée d'une composée)

mais $f'(a^n x) = a f(a a^n x)$ avec (H)

d'où $f^{(n+1)}(x) = a^{\frac{n(n+1)}{2}} \times a^n \times a\, f(a^{n+1}x) = a^{\frac{n(n+1)}{2}} \times a^{n+1} f(a^{n+1}x)$
$= a^{(n+1)(\frac{n}{2}+1)} f(a^{n+1}x)$
$= a^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} f(a^{n+1}x)$ 1

- donc la propriété est vraie pour tout n

c) On peut appliquer la formule de Taylor reste intégral à f (qui est C^∞ sur $\mathbb{R}$) à l'ordre $n\in\mathbb{N}$ en $a=0$ (car $0\in\mathbb{R}$) :

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$

or $\forall k\in[[0,n]]$ $f^{(k)}(0) = a^{\frac{k(k+1)}{2}} f(a^k\times 0) = a^{\frac{k(k+1)}{2}} f(0)$

mais $f(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0$ d'où $f^{(k)}(0)=0$ 3

ainsi $\boxed{f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt}$

d) Soit $A\in\mathbb{R}_+^*$; f est continue sur le segment $[-A,A]$ donc elle est bornée (et atteint ses bornes) donc 2

$\exists M\in\mathbb{R}$, $\forall x\in[-A,A]$, $|f(x)|\le M$

e) Soit $n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in[-A,A]$. $|f^{(n)}(x)| = |a^{\frac{n(n+1)}{2}} f(a^n x)|$

or $a\in]0,1[$ donc $a^n\in]0,1[$ et $|a^n x|<A$

donc $a^n x\in[-A,A]$

donc $|f(a^n x)|\le M$

puis $|a^{\frac{n(n+1)}{2}}|\le 1$ donc $\boxed{|f^{(n)}(x)|\le M}$ 2

f) Soit $x\in[-A,A]$; soit $n\in\mathbb{N}$;

$|f(x)| \underset{(\text{avec } c))}{=} \left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt\right| \le \left|\int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!}|f^{(n+1)}(t)|\,dt\right|$

mais $\forall t\in[0,x]$ ou $[x,0]$ on a $t\in[-A,A]$

donc $|f^{(n+1)}(t)|\le M$ (avec e))

donc $|f(x)| \le \left|\int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!} M\,dt\right|$

Si $A\ge x\ge 0$: $|f(x)|\le \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} M\,dt = M\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^x$
$= M\left[0+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right]$
$= M\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \le M\frac{A^{n+1}}{(n+1)!}$

Si $-A\le x\le 0$: $|f(x)|\le \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!} M\,dt = M\left[\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_x^0$
$= \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!}M \le \frac{A^{n+1}}{(n+1)!}M$ 3

g) Soit $x\in\mathbb{R}$

Alors $\exists A\in\mathbb{R}^+$ | $x\in[-A,A]$

donc avec f) on a $\forall n\in\mathbb{N}$ $|f(x)|\le M\frac{A^{n+1}}{(n+1)!}$

or $M\frac{A^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $|f(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

mais $|f(x)|$ est constant (indépt de n) 2

donc $|f(x)| \to |f(x)|$

d'où $\boxed{|f(x)|=0}$ (par unicité de la limite !)

Ainsi f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

3) S'il f_1 et f_2 sont deux fonction continues sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x\in\mathbb{R}$, $f_1(x) = \int_0^{ax} f_1(t)\,dt + \varphi(x)$

et $f_2(x) = \int_0^{ax} f_2(t)\,dt + \varphi(x)$

Alors $f_1(x)-f_2(x) = \int_0^{ax}(f_1(t)-f_2(t))\,dt$ (par linéarité)

d'où $(f_1-f_2)(x) = \int_0^{ax}(f_1-f_2)(t)\,dt$

donc (f_1-f_2) est continue sur $\mathbb{R}$ et solution de (H)

donc $\boxed{f_1-f_2\equiv 0 \text{ sur } \mathbb{R}}$ 2

donc au plus une fonction est solution

Exercice 2

$\forall t>0 \quad f(t) = \dfrac{1}{1+t-e^{-t}}$ et $\forall x>0, \quad G(x) = \displaystyle\int_x^{2x} f(t)\,dt$

1) Soit $t>0$

$0 < e^{-t} < 1$ donc $-1 < -e^{-t} < 0$

donc $(1+t) - 1 < 1+t - e^{-t} < 1+t$

d'où $0 < t < 1+t - e^{-t} < 1+t$ donc

or $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement decroissante sur $]0,+\infty[$

$$\boxed{\frac{1}{1+t} < f(t) < \frac{1}{t}}$$

2) Soit $x>0$; alors $x<2x$ et $\forall t \in [x, 2x]$, $t>0$ donc avec le 1)

$$\frac{1}{1+t} \leq f(t) \leq \frac{1}{t}$$

donc $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{1+t} \leq G(x) \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{t}$

mais $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{1+t} = [\ln|1+t|]_x^{2x} = \ln\frac{1+2x}{1+x} = \ln\left(\frac{2+2x-1}{1+x}\right) = \ln\left(2 - \frac{1}{1+x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ln 2$

$\displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{t} = [\ln|t|]_x^{2x} = \ln\frac{2x}{x} = \ln 2$

par encadrement, $\boxed{G(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ln 2 = \ell}$

3) $x \mapsto 2x$ et $x \mapsto x$ sont derivables sur $]0,+\infty[$ et à valeurs dans $]0,+\infty[$ or $t \mapsto f(t)$ est continue sur $]0,+\infty[$ (car $0<t<1+t-e^{-t}$) donc G est derivable sur $]0,+\infty[$ (où F est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$)

De plus $G(x) = F(2x) - F(x)$

donc $G'(x) = 2f(2x) - f(x)$, $\forall x>0$.

càd, $G'(x) = \dfrac{2}{1+2x-e^{-2x}} - \dfrac{1}{1+x-e^{-x}}$

4) $h(t) = f(t) - \dfrac{1}{2t} = \dfrac{1}{1+t-e^{-t}} - \dfrac{1}{2t} = \dfrac{2t - 1 - t + e^{-t}}{2t(1+t-e^{-t})} = \dfrac{t-1+e^{-t}}{2t(1+t-e^{-t})}$

$= \dfrac{t-1+1-t+\frac{1}{2}t^2+o(t^2)}{2t(1+t-(1-t+\frac{1}{2}t^2+o(t^2)))} = \dfrac{\frac{1}{2}t^2+o(t^2)}{2t(2t-\frac{1}{2}t^2+o(t^2))} = \dfrac{\frac{1}{2}t^2+o(t^2)}{4t^2-t^3+o(t^3)}$

$= \dfrac{\frac{1}{2}+o(1)}{4+o(1)} = \dfrac{1}{8}\,\dfrac{1+o(1)}{1+o(1)} = \dfrac{1}{8}(1+o(1))(1-o(1)) = \boxed{\frac{1}{8}+o(1)}$ ($DL_0(0)$ de R)

car $\frac{1}{1+u} = 1 - u + \underset{u\to 0}{o(u)}$

donc $\boxed{h(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{8}}$ on peut prolonger h en posant $h(0) = \frac{1}{8}$

5) Soit H une primitive de h sur $[0,+\infty[= I$ (H existe car h est C^0 sur I)

$\forall x>0 \quad H(2x) - H(x) = \displaystyle\int_x^{2x} h(t)\,dt = \int_x^{2x} f(t)\,dt - \int_x^{2x} \frac{1}{2t}\,dt$

$H(2x) - H(x) = G(x) - \frac{1}{2}\ln 2$

or $H(2x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} H(0)$ (continuité de H en 0)

$H(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} H(0)$ donc $H(2x) - H(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ d'où $G(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{\ln 2}{2}$

on peut poser $\boxed{G(0) = \frac{\ln 2}{2}}$

5) on pose $\forall x>0 \quad \Delta(x) = G(x) - \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{1+t}\,dt$

a) On fixe $x>0$.

on a $x<2x$ et, $\forall t \in [x, 2x]$, $t>0$ donc $\frac{1}{1+t} \leq f(t)$ d'après le 1)

d'où $0 \leq f(t) - \frac{1}{1+t}$.

Puis $f(t) - \dfrac{1}{1+t} = \dfrac{1}{1+t-e^{-t}} - \dfrac{1}{1+t} = \dfrac{1+t-(1+t-e^{-t})}{(1+t)(1+t-e^{-t})} = \dfrac{e^{-t}}{(1+t)(1+t-e^{-t})}$

or $\varphi : t \mapsto 1+t-e^{-t}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ (sa dérivée est $t \mapsto 1+e^{-t} > 0$)

donc $\forall t \in [x, 2x]$, comme $0 < x \leq t$ on a

$\varphi(0) = 0 < \varphi(x) \leq \varphi(t)$

d'où $0 < (1+x-e^{-x}) \leq 1+t-e^{-t}$

donc $\dfrac{1}{1+t-e^{-t}} \leq \dfrac{1}{1+x-e^{-x}}$ par produit des inégalités (tout est positif)

puis $0 < \dfrac{1}{1+t} < 1$ donc

$\dfrac{1}{(1+t)(1+t-e^{-t})} \leq \dfrac{1}{1+x-e^{-x}}$

enfin $e^{-t} > 0$ donc $\dfrac{e^{-t}}{(1+t)(1+t-e^{-t})} \leq \dfrac{e^{-t}}{1+x-e^{-x}}$

donc $\boxed{0 \leq f(t) - \frac{1}{1+t} \leq \frac{e^{-t}}{1+x-e^{-x}}}$

b) $\Delta(x) = G(x) - \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{1+t}\,dt = \int_x^{2x} f(t)\,dt - \int_x^{2x} \frac{1}{1+t}\,dt = \int_x^{2x} f(t) - \frac{1}{1+t}\,dt$

D'après le a), comme $x \leq 2x$ on a :

$0 \leq \Delta(x) \leq \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{1+x-e^{-x}}\,dt$

$= \dfrac{1}{1+x-e^{-x}} \displaystyle\int_x^{2x} e^{-t}\,dt$

$= \dfrac{1}{1+x-e^{-x}} (e^{-x} - e^{-2x})$

ainsi $\forall x>0 \quad 0 \leq x\Delta(x) \leq \dfrac{x}{1+x-e^{-x}}(e^{-x} - e^{-2x})$

or $e^{-2x} = \underset{x\to+\infty}{o}(e^{-x})$ et $e^{-x} = \underset{x\to+\infty}{o(1)}$ et $1 = \underset{x\to+\infty}{o(x)}$

ainsi $\dfrac{x}{1+x-e^{-x}}(e^{-x} - e^{-2x}) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x e^{-x}}{x} = e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

donc par encadrement, $x\Delta(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'où $\boxed{\Delta(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)}$

c) $G(x) - \ell = G(x) - \ln 2 = \Delta(x) - \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{1+t}\,dt - \ln 2$

$= \Delta(x) - [\ln|1+t|]_x^{2x} - \ln 2 = \Delta(x) - \ln\left(\frac{2+2x-1}{1+x}\right) - \ln 2$

$= \Delta(x) - \ln\left(\frac{1+2x}{1+x}\right) - \ln 2$

$= \Delta(x) - \ln\left(2 - \frac{1}{1+x}\right) - \ln 2$

or $\ln\left(2 - \frac{1}{1+x}\right) = \ln 2\left(1 - \frac{1}{2(1+x)}\right) = \ln 2 + \ln\left(1 - \frac{1}{2(1+x)}\right)$ et $\dfrac{1}{2(1+x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\ln\left(1 - \frac{1}{2(1+x)}\right) \sim \dfrac{-1}{2(1+x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2x}$

$\ldots \ln 2 = o\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{\ldots}$