Cap ECL 1 DS 09 (15/04/2025) CORRIGÉ

exercice 1

Soit $n \geq 2$

1) Partie 1 : soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$

$Tr(\alpha A + B) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha a_{ii} + b_{ii}) = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_{ii} + \sum_{k=1}^{n} b_{ii} = \alpha\, Tr(A) + Tr(B)$ donc Tr est linéaire

donc $Tr : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire

2) $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \longmapsto Tr(A)M - Tr(M)A$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $Tr(A) \neq 0$.

f est linéaire :

Soit $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$

$f(\alpha M + N) = Tr(A)(\alpha M + N) - Tr(\alpha M + N)A$ } linéarité de Tr

$= \alpha Tr(A)M + Tr(A)N - (\alpha\, tr(M) + tr(N))A$

$= \alpha(tr(A)M - tr(M)A) + Tr(A)N - tr(N)A$

$= \alpha f(M) + f(N)$ donc f est linéaire

f est à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (évident) car $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)

donc f est un endomorphisme

Partie 2)

1) $n = 2$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $tr(A) = 1+1 = 2$ $Tr(D) = a+d$

$f(M) = 2M - (a+d)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+d & -a-d \\ 0 & a+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-d & 2b+a+d \\ 2c & d-a \end{pmatrix}$

2) $M \in Ker(f) \iff \begin{cases} a - d = 0 \\ 2b + a + d = 0 \\ 2c = 0 \\ d - a = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = d \\ b = -d \\ c = 0 \end{cases} \iff M = dA$, $d \in \mathbb{R}$

donc $Ker(f) = Vect(A)$ ; Soit $(E_{ij})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$Im(f) = Vect(f(E_{11}), f(E_{12}), f(E_{21}), f(E_{22}))$

$= Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$

mais $(A)$ est libre, c'est une base de $Ker(f)$ donc $\dim Ker f = 1$

puis, d'après le théorème du rang, $\dim Im f = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) - \dim Ker f = 4 - 1 = 3$

et $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

donc $Im f = Vect\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{U}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}_{V}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{W}\right)$

La famille $(U, V, W)$ engendre $Im f$ ; $card(U, V, W) = 3 = \dim Im f$

donc $(U, V, W)$ est une base de $Im f$

Partie 3

1) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Si $M \in Ker(f)$ alors $tr(A)M - Tr(M)A = O_n$ donc $tr(A)M = tr(M)A$

et $tr(A) \neq 0$ donc $M = \frac{tr(M)}{tr(A)} A \in Vect(A)$

donc $Ker(f) \subseteq Vect(A)$

2) Soit $M \in Vect(A)$ alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $M = \lambda A$

donc $f(M) = tr(A)\lambda A - tr(\lambda A)A = \lambda tr(A)A - \underbrace{\lambda tr(A) A}_{\text{(linéarité de Tr)}} = O_n$ donc $M \in Ker f$

ainsi $Vect(A) \subseteq Ker(f)$

donc, par double inclusion $Ker f = Vect(A)$

3) $Im(Tr)$ est un SEV de $\mathbb{R}$ (ensemble d'arrivée de Tr)

or $\dim \mathbb{R} = 1$ donc on a seulement deux choix :

Soit $Im(Tr) = \mathbb{R}$ (càd $\dim Im(Tr) = 1$)

Soit $Im(Tr) = \{0\}$ (càd $\dim Im(Tr) = 0$)

ici $Tr(A) \neq 0$ donc $Im(Tr) \neq \{0\}$ donc $\boxed{Im(Tr) = \mathbb{R}}$

(Tr est surjective) et $rg(Tr) = 1$.

D'après le thm du rang, $\dim Ker Tr = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - 1$

$\boxed{\dim Ker Tr = n^2 - 1}$

4) On a vu au 2) que $Ker f = Vect(A)$

ainsi $\dim Ker f = 1$ (droite vectorielle)

d'après le théorème du rang, $\dim Im f = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - 1 = n^2 - 1 = \dim Ker Tr$

or $Im(f)$ et $Ker(Tr)$ sont deux SEV de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Il suffit donc de montrer une inclusion pour avoir leur égalité.

Soit $B \in Im f$ : $\exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B = Tr(A)M - Tr(M)A$

alors $Tr(B) = Tr(Tr(A)M - Tr(M)A) = Tr(A)Tr(M) - Tr(M)Tr(A) = 0$ (linéarité de Tr)

d'où $B \in Ker(Tr)$

ainsi $Im f = Ker Tr$

5) Ainsi $\left.\begin{array}{l} \dim Im f = n^2 - 1 \\ \dim Ker(f) = 1 \end{array}\right\}$ d'où $\dim Im f + \dim Ker f = n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

mais si $M \in Im f \cap Ker f$ alors $M \in Ker Tr \cap Vect(A)$

donc $Tr(M) = 0$ et $M = \lambda A$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

or $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$ et $Tr(A) \neq 0$ donc $\lambda = 0$ donc $M = 0$

ainsi $Im f \cap Ker f = \{0_n\}$

Ainsi $Im f \oplus Ker f = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Exercice 2

1) Partie 1

a) Soit $v \in \mathcal{L}(E)$

Soit $x \in \operatorname{Ker} v$ ; alors $v(x) = 0_E$ donc $v(v(x)) = v(0_E) = 0_E$ ($v$ linéaire)

donc $v^2(x) = 0_E$ et $x \in \operatorname{Ker} v^2$

ainsi $\boxed{\operatorname{Ker} v \subseteq \operatorname{Ker} v^2}$

b) D'après le theoreme du rang :

$\dim \operatorname{Ker}(v) + rg(v) = \dim E = 3$

et $\dim \operatorname{Ker}(v^2) + rg(v^2) = 3$

or $rg(v) = 2$ d'où $\dim \operatorname{Ker} v = 3 - 2 = 1$

$\operatorname{Ker}(v) \subseteq \operatorname{Ker}(v^2)$ donc $\dim \operatorname{Ker} v^2 > 1$

puis $\operatorname{Ker}(v^2) \neq \operatorname{Ker}(v)$ et

ainsi $\dim \operatorname{Ker}(v^2) = 2$ ou $3$

mais, si $\dim \operatorname{Ker}(v^2) = 3$ alors $\operatorname{Ker}(v^2) = E$ ce qui signifie que $v^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$

or $v^2 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $\boxed{\dim \operatorname{Ker}(v^2) = 2}$

Soit $x \in \operatorname{Ker}(v^2) \setminus \operatorname{Ker}(v)$

$(x, v(x))$ est libre : Soit $\alpha, \beta$ deux réels

$\alpha x + \beta v(x) = 0_E$ $\Rightarrow$ $v(\alpha x + \beta v(x)) = v(0_E) = 0_E$

$\Rightarrow$ $\alpha v(x) + \beta \underbrace{v^2(x)}_{=0_E} = 0_E$ (car $x \in \operatorname{Ker} v^2$)

$\Rightarrow$ $\alpha v(x) = 0_E$

$\Rightarrow$ $\alpha = 0$ (car $v(x) \neq 0_E$ puisque $x \notin \operatorname{Ker} v$)

et $v(x) \neq 0_E \Rightarrow \beta = 0$ donc $(x, v(x))$ est une famille libre de $\operatorname{Ker}(v^2)$ à 2 éléments (en effet $x \in \operatorname{Ker} v^2$, puis $v^2(v(x)) = v(v^2(x)) = v(0_E) = 0_E$ donc $v(x) \in \operatorname{Ker} v^2$)

et comme $\dim \operatorname{Ker} v^2 = 2$, c'est une base de $\operatorname{Ker} v^2$

2) Partie 2

a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$A - \lambda I$ est inversible $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\}$

$\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker}(f - \lambda Id_{\mathbb{R}^3}) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$(A - \lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (4-\lambda)x + y - z = 0 & L_1 \\ x + (2-\lambda)y - z = 0 & L_2 \\ 2x + y + (1-\lambda)z = 0 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + (2-\lambda)y - z = 0 \\ (4-\lambda)x + y - z = 0 \\ 2x + y + (1-\lambda)z = 0 \end{cases}$ $L_1 \leftrightarrow L_2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + (2-\lambda)y - z = 0 & L_1 \\ (1-(4-\lambda)(2-\lambda))y + (-1+4-\lambda)z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - (4-\lambda)L_1 \\ (1-2(2-\lambda))y + (1-\lambda+2)z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + (2-\lambda)y - z = 0 \\ (1-8+4\lambda+2\lambda-\lambda^2)y + (3-\lambda)z = 0 \Leftrightarrow (-7+6\lambda-\lambda^2)y + (3-\lambda)z = 0 \\ (1-4+2\lambda)y + (3-\lambda)z = 0 \Leftrightarrow (-3+2\lambda)y + (3-\lambda)z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + (2-\lambda)y - z = 0 \\ (-7+6\lambda-\lambda^2)y + (3-\lambda)z = 0 \\ (\underbrace{4-4\lambda+\lambda^2}_{=(2-\lambda)^2})y = 0 \end{cases}$ $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

- Si $\lambda \neq 2$ et $\lambda \neq 3$ alors $x = y = z = 0$ donc $\operatorname{Ker}(A - \lambda I) = \{0\}$
- Si $\lambda = 2$ ou $\lambda = 3$ alors le système admet une infinité de solution (il est de rang $\leqslant 2$)

donc $A - \lambda I$ est inversible $\Leftrightarrow$ $\lambda \notin \{2, 3\}$

~~b) $0 \notin \{2, 3\}$ donc $A - 0I$ est inversible~~

~~donc $A$ est inversible~~

~~donc $f$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$~~

b) $rg(A - 2I) = rg\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{C_1 \leftrightarrow C_2}{=} rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \overset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 + C_1}}{=} rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\overset{C_3 \leftarrow C_3 + C_2}{=} rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$

donc $rg(A - 2I) = 2$

$rg(A - 3I) = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \quad C_3 + C_1}{=} rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 2$

c) Soit $x \in \operatorname{Ker}((f - 2Id)^2) \cap \operatorname{Ker}(f - 3Id)$

alors $(f - 2Id)^2(x) = 0$ et $(f - 3Id)(x) = 0$

ainsi $f(x) = 3x$ et $(f - 2Id)(f(x) - 2x) = 0$ c.à.d $f^2(x) - 2f(x) + 4x - 2f(x) = 0$

$f(x) = 3x$ $\Leftrightarrow$ $f^2(x) - 6x + 4x - 6x = 0$

$f^2(x) = 8x$

$\Rightarrow f(f(x)) = 8x$

donc ($f(x) = 3x$) $f(3x) = 8x$

$3(3x) = 8x$

$9x = 8x$

ainsi $\boxed{\operatorname{Ker}(f - 2Id)^2 \cap \operatorname{Ker}(f - 3Id) \subseteq \{0\}}$ et d'où $x = 0$

et l'inclusion réciproque automatique

d'où l'égalité

d) $A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$(A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$rg(A - 2I)^2 = rg\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 = rg(f - 2Id)^2$

$C_1 \leftarrow C_1 - 3C_2 \quad C_3 \leftarrow C_3 + 2C_2$

e) D'après le thm du rang appliqué à $(f - 2Id)^2$ :

$\underbrace{rg(f - 2Id)^2}_{=1} + \dim \operatorname{Ker}(f - 2Id)^2 = \dim \mathbb{R}^3 = 3$

donc $\dim \operatorname{Ker}(f - 2Id)^2 = 3 - 1 = 2$,

et appliqué à $(f - 3Id)$ :

$\underbrace{rg(f - 3Id)}_{=rg(A - 3I) = 2 \text{ d'après b)}} + \dim \operatorname{Ker}(f - 3Id) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$

d'où $\dim \operatorname{Ker}(f - 3Id) = 1$

Ainsi $\dim \operatorname{Ker}(f - 2Id)^2 + \dim \operatorname{Ker}(f - 3Id) = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

et avec le d) leur intersection est réduite à $\{0\}$

donc ces SEV sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$

f) Soit $X(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$X \in \operatorname{Ker}(f - 3Id) \Leftrightarrow (A - 3I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 & L_1 \\ -2y = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -y = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$ $\operatorname{Ker}(f - 3Id) = \operatorname{Vect}((1, 0, 1))$ on peut prendre $\boxed{\varepsilon_3 = (1, 0, 1)}$

g) $X \in \operatorname{Ker}(f - 2Id)^2 \Leftrightarrow (A - 2I)^2(X) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y - 2z = 0 \\ 0 = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 2z - 3x$ avec d)

$\operatorname{Ker}(f - 2Id)^2 = \operatorname{Vect}((\underbrace{1, -3, 0}_{u}), (\underbrace{0, 2, 1}_{v}))$

on peut prendre

$\boxed{\varepsilon_2 = 2v + u = (1, 1, 2)}$

h) Posons $\varepsilon_1 = f(\varepsilon_2) - 2\varepsilon_2$

Alors $\varepsilon_1 = (f - 2Id)(\varepsilon_2)$

Soit $v = f - 2Id$

on sait que $\varepsilon_2 \in Ker(f - 2Id)^2$ d'après le g) donc $\varepsilon_2 \in Ker\, v^2$

or $\varepsilon_2 \notin Ker\, v$ : en effet, $\varepsilon_2 = (1, 1, 2)$ et $(A - 2I)\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\1 & 0 & -1\\2 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

donc, d'après la partie 1, $(\varepsilon_2, v(\varepsilon_2)) = (\varepsilon_2, \varepsilon_1)$ est une base de $Ker\, v^2 = Ker(f - 2Id)^2$

Mais d'après le e), la concaténation des bases de $Ker(f - 2Id)^2$ et de $Ker(f - 3Id)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

Or d'après le f), on peut prendre $(\varepsilon_3)$ comme base de $Ker(f - 3Id)$ (famille libre car 1 seul vecteur non nul).

Ainsi $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$

i) . On sait que $\varepsilon_3 \in Ker(f - 3Id)$ donc $f(\varepsilon_3) = 3\varepsilon_3$ d'où $[f(\varepsilon_3)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$

. $\varepsilon_1 = f(\varepsilon_2) - 2\varepsilon_2$ donc $f(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2$ d'où $[f(\varepsilon_2)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

• $[\varepsilon_1]_{\mathcal{C}} = (A - 2I)\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ d'où $\varepsilon_1 = (1, -1, 1)$

base canonique de $\mathbb{R}^3$ $\longrightarrow \mathcal{C}$

ainsi $[f(\varepsilon_1)]_{\mathcal{C}} = A\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 1 & -1\\1 & 2 & -1\\2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix} = 2[\varepsilon_1]_{\mathcal{C}}$

ainsi $[f(\varepsilon_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$

ainsi $T = \underset{\mathcal{B}}{mat}(f) = \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}$