Exercice 1 (10 points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le but de cet exercice est de calculer

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} k2^k,$$

de deux manières différentes.

1. Première méthode

On appelle f la fonction définie sur $I =]1, +\infty[$ par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k.$$

(a) Donner une expression de la dérivée f' de f sur l'intervalle I.

(b) Donner une autre expression de $f(x)$ sur I. En déduire une nouvelle expression de la dérivée f' de f sur cet intervalle.

(c) À l'aide des deux expressions de f', déterminer la valeur de A_n.

2. Deuxième méthode

On note

$$S_n = \sum_{0 \le i < j \le n} 2^j.$$

(a) Exprimer S_n de deux façons différentes comme somme double.

(b) En calculant chacune des deux expressions trouvées, montrer que

$$S_n = A_n = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

Exercice 2 (12 points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$. On souhaite résoudre l'équation, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(E) : \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+i\tan(a)}{1-i\tan(a)}.$$

1. Déterminer la forme trigonométrique du complexe $\dfrac{1+i\tan(a)}{1-i\tan(a)}$.
2. Résoudre l'équation (F) suivante, d'inconnue $w \in \mathbb{C}$:

$$w^n = \frac{1+i\tan(a)}{1-i\tan(a)}.$$

3. Simplifier, pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2p\pi \mid p \in \mathbb{Z}\}$, l'expression :

$$\frac{e^{i\theta}-1}{i\big(e^{i\theta}+1\big)}.$$

4. Résoudre maintenant l'équation (E).
5. On constate que les solutions de l'équation (E) sont réelles. Montrer qu'on pouvait l'affirmer sans résoudre (E), en exploitant l'égalité des modules des deux membres de l'équation.

Exercice 3 (3 points)

Soit n un entier naturel non nul.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(H) : z^n + 1 = 0$.

(a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(z + e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a_p z^p,$$

où pour tout entier p entre 0 et n,

$$a_p = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}(n-p)}.$$

(b) Calculer la valeur de a_p pour tout $p \in [0, n]$. (On vérifiera que $a_p = 0$ sauf pour deux valeurs de p à déterminer.)

(c) En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(z + e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n = n\left(z^n + 1\right).$$

(a) Factoriser, pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $e^{i\theta} + e^{i\theta'}$.

(b) À l'aide du résultat de la question 2(c) et d'une solution particulière bien choisie de (H), en déduire que

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos^n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) = 0.$$

Exercice 4 (6 points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une expression des sommes suivantes, sans utiliser le symbole $\sum$:

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{30} (-1)^k$.
2. $\displaystyle\sum_{k=10}^{20} (2k-4)$.
3. $\displaystyle\sum_{k=3}^{10} (\sqrt{k} - \sqrt{k+2})$.
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{3}{2^k}$.
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{3^k} \binom{n}{k}$.