La présentation, la lisibilité et l'orthographe, ainsi que la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

Quelques prérequis : Considérons une suite (M_n) de matrices carrées de taille 3 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad M_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & f_n \\ g_n & h_n & i_n \end{pmatrix}.$$

Si toutes les suites $(a_n), (b_n), \ldots, (i_n)$ convergent, on dit que la suite de matrices (M_n) converge et on note :

$$\lim_{n\to+\infty} M_n = \begin{pmatrix} \lim a_n & \lim b_n & \lim c_n \\ \lim d_n & \lim e_n & \lim f_n \\ \lim g_n & \lim h_n & \lim i_n \end{pmatrix}.$$

On rappelle que $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$e^t = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}.$$

On admet enfin que, si A et B sont deux matrices fixes et si (u_n) et (v_n) sont des suites réelles convergentes, de limites respectives ℓ et ℓ', alors la suite de matrices $u_nA + v_nB$ converge vers $\ell A + \ell' B$.

Énoncé : Pour tout $M \in M_3(\mathbb{R})$, on note $E(M)$ la matrice suivante, *si elle existe* :

$$E(M) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k.$$

1. Montrer que $E(I_3)$ existe et déterminer $E(I_3)$.
2. Montrer que $E(O_3)$ existe et que $E(O_3) = I_3$.
3. On prend $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que $E(D)$ existe et déterminer $E(D)$.
4. Soit
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Montrer que M est nilpotente d'indice 3.
   (b) Montrer que $E(M)$ existe et calculer $E(M)$.
   (c) Calculer $\det(E(M))$ puis $e^{\mathrm{Tr}(M)}$. Que constate-t-on ?
5. Soit A une matrice de $M_3(\mathbb{R})$, nilpotente d'indice 3 et soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A.
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $x \notin \mathrm{Ker}(f^2)$. Montrer que $(x, f(x), f^2(x))$ est une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Donner la matrice N de f dans cette base $\mathcal{B}$.
   (c) On note P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ dans la base $\mathcal{B}$. Quel est le lien entre A et N ? et entre A^k et N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$?
   (d) Déterminer $E(N)$. Comment en déduire $E(A)$? (le calcul explicite n'est pas demandé).
   (e) Démontrer que $\det(E(A)) = e^{\mathrm{Tr}(A)}$.
6. Soit
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \text{on notera } \mathcal{C} \text{ la base canonique de } \mathbb{R}^3.$$

(a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer $\det(B - \lambda I_3)$ et vérifier qu'il s'annule pour $\lambda = 1$ ou $\lambda = 2$.

(b) Déterminer une base (e_1) de $\operatorname{Ker}(B - I_3)$ puis une base (e_2, e_3) de $\operatorname{Ker}(B - 2I_3)$.

(c) Calculer $\det_{\mathcal{F}}(e_1, e_2, e_3)$.

(d) En déduire une matrice Q telle que $B = QDQ^{-1}$, où

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(e) On a vu à la question 3) que $E(D)$ existe ; en déduire que $E(B)$ existe et donner une formule permettant de calculer $E(B)$.