La présentation, la lisibilité et l'orthographe, ainsi que la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (10 points)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère deux variables aléatoires X et Y *indépendantes* qui suivent une loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$. On pose

$$S = \max(X, Y) \qquad \text{et} \qquad T = \min(X, Y).$$

1. Déterminer la loi et l'espérance de S (on pourra commencer par calculer $\mathbb{P}(S \leq k)$ pour $k \in \{1, 2, \dots, n\}$).
2. En déduire l'espérance de T.
3. Les variables S et T sont-elles indépendantes ?

Exercice 2 (16 points)

Soit $n \geq 2$. Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant : le joueur lance n fois une pièce et compte le nombre de *Pile* obtenus. Si ce nombre est pair, le joueur est déclaré *gagnant*, sinon il est déclaré *perdant*. S'il est vainqueur, il gagne 10 euros pour chaque Pile obtenu, alors que s'il a perdu, il doit payer 10 euros pour chaque Pile obtenu.

En particulier, s'il n'a fait aucun Pile, il est déclaré vainqueur mais ne remporte rien. À chaque lancer, la probabilité de Pile est $p \in [0, 1]$. On notera X le nombre de Pile obtenus, G le gain algébrique du joueur, et A l'évènement « le joueur est déclaré vainqueur ». On dira que le jeu est *défavorable* au joueur lorsque $\mathbb{E}(G) < 0$.

1. Le forain souhaite rendre le jeu le plus attractif en affichant qu'à ce jeu, il y a plus de gagnants que de perdants ; il cherche donc les conditions sur p et n pour que son affichage ne soit pas mensonger. On note

$$Y = (-1)^X \qquad \text{et} \qquad Z = \frac{Y+1}{2}.$$

(a) Montrer que Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$.
(b) En déduire $\mathbb{E}(Y)$ en fonction de $\mathbb{P}(A)$.
(c) Reconnaître la loi de X ; donner $X(\Omega)$ et $\mathbb{P}(X = k)$, pour tout $k \in X(\Omega)$.
(d) En déduire que l'on a également $\mathbb{E}(Y) = (1 - 2p)^n$.
(e) Démontrer que

$$\mathbb{P}(A) \geq \frac{1}{2} \iff \left(p \leq \tfrac{1}{2}\right) \text{ ou } (n \text{ pair}).$$

2. Le forain souhaite néanmoins vérifier que, tout en laissant son jeu attractif (c'est-à-dire en faisant que $\mathbb{P}(A) \geq \frac{1}{2}$), son activité soit rentable pour lui (c'est-à-dire que le jeu soit défavorable au joueur, avec $\mathbb{E}(G) < 0$).

(a) Exprimer G en fonction de X et Y.
(b) Démontrer que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

(c) Montrer que

$$\mathbb{E}(G) = -10np\,(1 - 2p)^{n-1}.$$

(d) Démontrer alors que

$$\begin{cases} \mathbb{P}(A) \geq \dfrac{1}{2} \\ \mathbb{E}(G) < 0 \end{cases} \iff p < \frac{1}{2}.$$

Exercice 3 (14 points)

Soient n et c deux entiers naturels fixés, avec $c \geq 1$ et $n \geq 3$. Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On tire une boule, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne, *avec* c boules de la couleur tirée. On répète cette épreuve. On réalise ainsi une succession de n tirages. Pour tout i entre 1 et n, on note X_i la variable aléatoire égale à 1 si on tire une boule blanche au i-ème tirage, et 0 sinon.

Pour tout $p \in \{1, \dots, n\}$, on pose

$$Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i.$$

1. Que représente Z_p, pour tout $p \in \{1, \dots, n\}$?
2. Donner la loi de X_1 et son espérance.
3. Déterminer soigneusement la loi de Z_2.
4. Soit $p \in \{1, \dots, n-1\}$.
   (a) Quel est l'ensemble $Z_p(\Omega)$ des valeurs prises par Z_p ?
   (b) Déterminer, pour tout $k \in Z_p(\Omega)$, la valeur de $\mathbb{P}_{\{Z_p=k\}}(X_{p+1} = 1)$.
   (c) En déduire :
   $$\mathbb{P}(X_{p+1} = 1) = \frac{1 + c\,\mathbb{E}(Z_p)}{2 + pc}.$$
5. Montrer par récurrence forte que, pour tout $p \in \{1, \dots, n\}$, X_p a la même loi que X_1.