Exercice 1 (20 points)

Pour toutes les questions de cet exercice, on cherche les solutions à valeurs réelles.

1. **Partie 1 : Préliminaires**

   (a) Soit $x \in]-1,1[$. Montrer que $\tan\big(\arcsin(x)\big)$ existe et simplifier l'expression.

   (b) Résoudre sur $]-1,1[$ l'équation différentielle
$$(F_0)\colon\ (1-x^2)\,y'(x) + x\,y(x) = 0.$$

   (c) Soit $x \in]-1,1[$. En posant $u = \sin t$, calculer
$$\int^x \frac{1}{\big(1-u^2\big)^{3/2}}\,du.$$

   (d) Soit C un réel fixé. On note
$$(F_C)\colon\ (1-x^2)\,y'(x) + x\,y(x) = C, \quad \forall x \in]-1,1[.$$
   Résoudre (F_C) (on pourra utiliser la méthode de variation de la constante).

   (e) Résoudre sur $\mathbb{R}$:
$$(G)\colon\ z''(t) + z(t) = \frac{\sin(2t)}{2}.$$

2. **Partie 2 : Résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients non constants**

   On souhaite résoudre les équations différentielles suivantes sur $]-1,1[$:
$$(E_0)\colon (1-x^2)\,y''(x) - x\,y'(x) + y(x) = 0, \quad (E)\colon (1-x^2)\,y''(x) - x\,y'(x) + y(x) = x\sqrt{1-x^2}.$$

   (a) **Résolution de** (E_0)
   Soit y une fonction deux fois dérivable sur $I =]-1,1[$. On pose, pour tout $x \in I$,
$$v(x) = (1-x^2)\,y'(x) + x\,y(x).$$
   — Justifier que v est dérivable sur I et calculer $v'(x)$.
   — Déduire de ce qui précède l'ensemble des solutions de (E_0) sur I.

   (b) **Résolution de** (E)

      i. Soit $y :]-1,1[\to \mathbb{R}$ deux fois dérivable. On définit la fonction z sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ par
$$\forall\, t \in]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[, \quad z(t) = y\big(\sin(t)\big).$$
      — Justifier que z est bien définie et deux fois dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.
      — Exprimer $z'(t)$ et $z''(t)$ en fonction de y', y'' et t.

      ii. Montrer que y est solution de (E) sur $]-1,1[$ si et seulement si z est solution de (G) sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

      iii. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

      iv. Comparer à l'ensemble des solutions de (E_0) et commenter.

Exercice 2

On définit la fonction f par :

$$f(x) = 2\arcsin(x) + \arcsin\big(1 - 2x^2\big).$$

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f.
2. Déterminer l'ensemble Δ_f sur lequel on peut affirmer que f est dérivable.
3. Calculer et simplifier $f'(x)$ pour $x \in \Delta_f$. On distinguera deux cas.
4. Montrer (en justifiant soigneusement) que f est constante sur le fermé $[0, 1]$, et donner sa valeur.
5. Exprimer $f(x)$ en fonction de $\arcsin(x)$ pour $x \in [-1, 0]$.
6. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $[-1, 0]$ une unique solution, notée α.
7. Montrer que $-\frac{1}{2} < \alpha$.
8. Déterminer α.

Exercice 3

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \arccos\big(\tanh(x)\big) \; + \; \arctan\big(\sinh(x)\big).$$

1. Quel est l'ensemble de définition D de f ?
2. Déterminer une expression très simplifiée de f sur D.
3. Résoudre l'équation $\tanh(x) = \frac{5}{13}$.
4. Que vaut $\arccos\big(\frac{5}{13}\big) + \arctan\big(\frac{5}{12}\big)$?

FIN