Exercice 1 (30 points)

On considère l'équation fonctionnelle :

$$(P) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \big[1 - f(x)\,f(y)\big]\,f(x+y) \;=\; f(x) + f(y).$$

Le but est de trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$, qui vérifient (P).

Dans les questions 1) à 5), on suppose que f vérifie toutes les conditions ci-dessus.

1. **Premières propriétés de f**
   (a) Montrer que $f(0) = 0$.
   (b) Montrer que f est impaire.
2. **Limite de f en $+\infty$**
   (a) Justifier que $\forall x \in \mathbb{R} :\ (1 - f(x)^2)\,f(2x) = 2\,f(x)$.
   (b) Montrer qu'il est impossible que f ait une limite infinie lorsque $x \to +\infty$.
   (c) Montrer que, si f possède une limite finie lorsque $x \to +\infty$, alors cette limite est nécessairement 0.
3. **Ensemble des zéros de f** On note dorénavant
   $$S \;=\; \{\, x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0 \}.$$
   (a) Justifier que $S \neq \varnothing$.
   (b) Montrer que si $x \in S$, alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, $m\,x \in S$.
   (c) Montrer que si $x \in S$, alors $x/2 \in S$.
4. **Raisonnement par l'absurde** Supposons, par l'absurde, que $S = \{0\}$.
   (a) Montrer que f a un signe constant strict sur $]0, +\infty[$.
   (b) Soit $(x, y) \in]0, +\infty[^2$. Montrer que $f(y) - f(x)$ est du signe de $f(y - x)$ (au sens strict).
   (c) Dans le cas $f > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, en déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Que dire dans l'autre cas ?
   (d) Conclure.
5. **Détermination de l'ensemble S**
   (a) Montrer qu'il existe un réel $a > 0$ dans S.
   (b) On fixe un tel $a \in S \cap]0, +\infty[$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a/2^n \in S$, puis que pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, $m\,a/2^n \in S$.
   (c) Soit $x > 0$ fixé. On définit la suite (u_n) par
   $$u_n = \frac{a}{2^n} \left\lfloor \frac{2^n\,x}{a} \right\rfloor, \quad n \in \mathbb{N}.$$
   Montrer que $u_n \to x$. En déduire que $x \in S$.
6. **Conclusion** Quelles sont les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues, qui vérifient (P) ?

Exercice 2 (11 points)

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}, \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sin(u_n). \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in [-1, 1]$.

2. Étudier la fonction g définie sur $[-1,1]$ par
$$g(x) = \sin(x) - x$$
et en déduire son signe sur cet intervalle.
3. Que dire de la suite (u_n) si u_0 est tel que $u_1 = 0$?
4. On suppose $u_1 \in]0,1]$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [0,1]$. En déduire que (u_n) est décroissante et donner sa limite.
5. Que se passe-t-il si $u_1 \in [-1,0[$? (On pourra justifier plus rapidement.)

Exercice 3 (9 points)

Soit (u_n) une suite réelle. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$v_n \; = \; \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}.$$
On suppose que la suite (u_n) est croissante et converge vers un réel ℓ.

1. Montrer que la suite (v_n) est également croissante et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq \ell$. Que peut-on en déduire ?
2. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$v_{2n} \; \geq \; \frac{u_n + v_n}{2}.$$
3. En déduire la limite de la suite (v_n).

FIN