Exercice 1 (11 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

1. Déterminer la parité de f.
2. Justifier que f est prolongeable par continuité en 0. On note encore f ce prolongement.
3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ puis calculer $f'(x)$.
4. Soit $x \in]0, \pi[$.
   (a) Montrer à l'aide du théorème des accroissements finis que
   $$x\cos(x) < \sin(x) < x.$$
   (b) En déduire l'étude des variations de f sur $[0, \pi]$.
5. Déterminer la limite
   $$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x},$$
   en justifiant.
6. (a) À l'aide des questions 4.a) et 5), montrer que f est dérivable à droite en 0 et donner la valeur de $f'_+(0)$.
   (b) En déduire, sans autre calcul, que f est dérivable en 0.
7. On pose, pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{3}]$,
   $$h(x) = \frac{\sin(x)}{x^2}.$$
   (a) Justifier que l'équation $h(x) = 1$ possède une unique solution sur $]0, \frac{\pi}{3}]$, que l'on notera α.
   (b) On définit la constante $C = \frac{\sqrt{3}}{4}$. On pose, pour $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$,
   $$\varphi(x) = x\cos(x) - \sin(x) + Cx^2.$$
   Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$, $\varphi(x) \geq 0$.
   (c) Déduire des questions 4.a) et 7) qu'il existe une constante L telle que $\left|f'(x)\right| \leq C$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$.
8. On définit la suite (u_n) par
   $$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$
   (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n existe et $u_n \in [0, \frac{\pi}{3}]$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|u_{n+1} - \alpha\right| \leq C\left|u_n - \alpha\right|$.
   (c) Démontrer que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite ?

Exercice 2 (8,5 points)

On note E l'ensemble des fonctions f de classe C^∞ sur $[0, 1]$ telles que, pour tout entier naturel n, la $n$ième dérivée de f soit positive sur $]0, 1[$, c'est-à-dire :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in]0, 1[, \quad f^{(n)}(x) > 0.$$

Ces fonctions sont dites *absolument monotones* sur $[0, 1]$.

1. Soient $f, g \in \mathcal{E}$ et $\lambda \geq 0$.

(a) Montrer que $\lambda f + g \in \mathcal{E}$.

(b) Montrer que $f\,g \in \mathcal{E}$.

2. Soit $f \in \mathcal{E}$. On pose $g = f'$. Calculer g' en fonction de f' et g et montrer, à l'aide d'une récurrence forte, que $g \in \mathcal{E}$.
3. On pose, pour tout $x \in [0, 1[$,
$$g(x) = -1 - \frac{2}{x-1}.$$
Montrer que $g \in \mathcal{E}$. (On pourra conjecturer puis admettre la forme des dérivées successives de g.)
4. On considère une fonction $f \in \mathcal{E}$.

   (a) Montrer que f admet une limite finie λ en 0^+.

   (b) On prolonge f par continuité en posant $f(0) = \lambda$. Montrer que f ainsi prolongée est de classe C^1 à droite en 0.

   (c) Plus généralement, montrer que f est de classe C^∞ et absolument monotone à droite en 0.

   (d) Peut-on en dire autant à gauche en 1 ? (Justifier.)

FIN