

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim(F) = \dim(G)$. On se propose de vérifier sur deux exemples concrets puis de démontrer dans le cas général que F et G admettent un supplémentaire commun dans E , c'est-à-dire qu'il existe un sous-espace vectoriel K de E tel que

$$F \oplus K = G \oplus K = E.$$

1. **Premier exemple.** Dans cette question, on pose $E = \mathbb{R}^3$.

(a) On prend

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y + z, y - z = 0\}, \quad G = \{(2a, -a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

Démontrer que F et G sont deux droites vectorielles et donner une base (f) de F et une base (g) de G .

- (b) Montrer qu'il existe un vecteur $h \in \mathbb{R}^3$ tel que $B = (f, f + g, h)$ soit une base de $E = \mathbb{R}^3$. Donner un tel vecteur h .

(c) On pose alors

$$K = \text{Vect}(f + g, h).$$

Démontrer que

$$F \oplus K = G \oplus K = E.$$

2. **Second exemple.** Dans cette question, on pose encore $E = \mathbb{R}^3$.

(a) On prend

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x = y + z\}, \quad G = \{(a, b - a, a + 2b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E et en donner une base.

- (b) Déterminer une base (e) de $F \cap G$.

- (c) Déterminer un vecteur $f \in F$ et un vecteur $g \in G$ tels que (e, f) soit une base de F et (e, g) soit une base de G .

(d) On pose

$$K = \text{Vect}(f + g).$$

Démontrer que

$$F \oplus K = G \oplus K = E.$$

3. **Cas général.** On suppose que $\dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$ et $\dim(F) = \dim(G) = p \in \mathbb{N}^*$ avec $p \leq n$. On considère une base $(e_1, e_2, \dots, e_k)$ de $F \cap G$.

- (a) Démontrer qu'il existe des vecteurs $f_{k+1}, \dots, f_p \in F$ et $g_{k+1}, \dots, g_p \in G$ tels que

$$B_F = (e_1, \dots, e_k, f_{k+1}, \dots, f_p), \quad B_G = (e_1, \dots, e_k, g_{k+1}, \dots, g_p)$$

soient respectivement des bases de F et G .

- (b) Soit H un supplémentaire de $F + G$ dans E . Déterminer $r = \dim(H)$ en fonction de n, p et k .

(c) On considère

$$B = (e_1, \dots, e_k, f_{k+1}, \dots, f_p, f_{k+1} + g_{k+1}, \dots, f_p + g_p, h_1, \dots, h_r),$$

où $(h_1, \dots, h_r)$ est une base de H . Montrer que B est une base de E .

(d) Soit

$$K = \text{Vect}(f_{k+1} + g_{k+1}, \dots, f_p + g_p, h_1, \dots, h_r).$$

Déduire de ce qui précède que

$$F \oplus K = E,$$

et montrer de même que $G \oplus K = E$.

Exercice 2

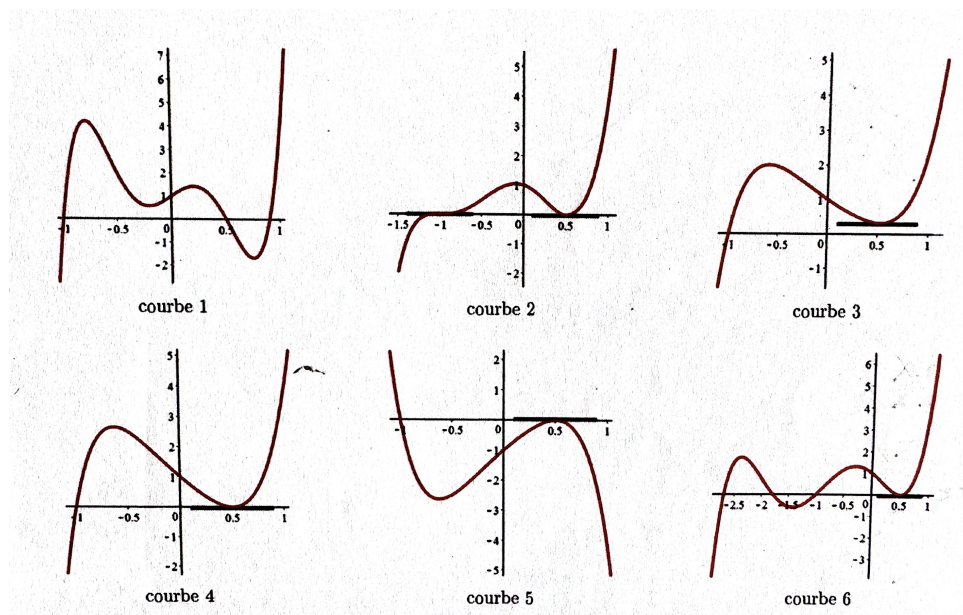
Soit P une fonction polynôme vérifiant les conditions suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{4x^5} = 1,$$

P admet -1 comme racine simple et $\frac{1}{2}$ comme racine double,

$P(x)$ est divisible par $(x^2 + 1)$.

- Donner l'expression de $P(x)$ pour tout réel x .
- Parmi les courbes numérotées de 1 à 6 ci-dessous, justifier qu'il n'y en a qu'une seule qui peut être la courbe représentative de P . Préciser laquelle.



- En considérant le polynôme dérivé P' , que l'on ne cherchera pas à calculer, expliquer pourquoi la courbe numéro 7 ci-dessous ne peut pas être la courbe représentative de P .

