Exercice 1 (11 points)

On considère l'application définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \exp\bigl(\arctan(x).$$

La courbe représentative de f est notée C.

1. **Étude en 0.**
   (a) Montrer que f admet un développement limité à tout ordre $n \in \mathbb{N}$ en 0, de la forme
   $$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n).$$
   (b) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de f.
   (c) Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$, $(1+x^2)f'(x)$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$(1+x^2)f^{(n+1)}(x) + (2nx-1)f^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0.$$
   (d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer a_{n+1} en fonction de n, a_n et a_{n-1}.
2. **Étude en 1.** Déterminer une équation de la tangente T à C en 1 et préciser la position relative de T et C au voisinage de 1.
3. **Étude en $+\infty$.** Montrer que C admet une asymptote horizontale D en $+\infty$ et préciser la position relative de C et D.

Exercice 2 (10 points)

On considère l'application définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = \frac{\sqrt{4+x^2}\,\ln\bigl(1+\sinh(x)\bigr)}{x}.$$

La courbe représentative de f est notée C.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On notera encore f le prolongement obtenu.
2. Étudier la dérivabilité de f en 0.
3. Montrer que $e^{-x} = o\bigl(\frac{1}{x}\bigr)$ lorsque $x \to +\infty$.
4. Déterminer deux réels a et b tels que, lorsque $x \to +\infty$,
   $$\ln\bigl(1+\sinh(x)\bigr) = ax + b + o\bigl(\tfrac{1}{x}\bigr).$$
5. Montrer que la courbe C admet une asymptote oblique Δ lorsque $x \to +\infty$, que l'on précisera. Préciser la position de C par rapport à Δ.

Exercice 3 (9 points)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation

$$e^x = n - x.$$

1. Montrer que cette équation admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$. On la notera x_n.
2. Étudier la monotonie puis la limite de la suite (x_n).
3. Démontrer que $x_n \sim \ln(n)$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que
   $$x_n = \ln(n) + \ln\Bigl(1 - \frac{x_n}{n}\Bigr).$$

5. En déduire l'existence d'un réel a tel que

$$x_n = \ln(n) + a\frac{\ln(n)}{n} + o\Big(\frac{\ln(n)}{n}\Big).$$

6. En déduire l'existence de deux réels b et c tels que

$$x_n = \ln(n) + a\frac{\ln(n)}{n} + b\frac{\ln(n)}{n^2} + c\frac{(\ln(n))^2}{n^2} + o\Big(\frac{(\ln(n))^2}{n^2}\Big).$$