Exercice 1 (10 points)

Dans ce problème, on considère un réel $a \in]0, 1[$.

1. Dans cette question, on suppose que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, solution de l'équation suivante :

$$(H) : \ \forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = \int_0^{ax} f(t)\, dt.$$

   (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer, pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ en fonction de f, a et x.

   (b) Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \ f^{(n)}(x) = a^{\frac{n(n+1)}{2}} f(a^n x)$.

   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$.

   (d) Soit $A \in \mathbb{R}_+$.

      i. Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe $M \in \mathbb{R}$, $\forall x \in [-A, A], \ |f(x)| \leq M$?

      ii. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-A, A], \ |f^{(n)}(x)| \leq M$.

      iii. Montrer enfin soigneusement que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-A, A], \ |f(x)| \leq M \frac{A^{n+1}}{(n+1)!}$.

   (e) En déduire que f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

2. Soit ω une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer, à l'aide du 1), qu'il existe au plus une fonction f, continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, telles que $\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = \int_0^{ax} f(t)\, dt + \varphi(x)$.

Exercice 2 (10 points)

On considère l'application f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(t) = \frac{1}{1 + t - e^{-t}}.$$

Pour $x > 0$, on définit

$$G(x) = \int_x^{2x} f(t)\, dt.$$

1. Montrer que pour tout $t > 0$, $\frac{1}{1+t} \leq f(t) \leq \frac{1}{t}$.
2. En déduire que G admet une limite finie ℓ en $+\infty$ et la déterminer.
3. Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer sa dérivée.
4. Pour $t > 0$, on pose $h(t) = f(t) - \frac{1}{2t}$.

   (a) Montrer que h se prolonge par continuité en 0. (On pourra chercher un $DL_0(0)$ de h.) On note encore h le prolongement.

   (b) Démontrer que G se prolonge par continuité en 0. Donner la valeur de $G(0)$.

5. On pose, pour $x > 0$,

$$\Delta(x) = G(x) - \int_x^{2x} \frac{1}{1+t}\, dt.$$

   (a) On fixe $x > 0$. Montrer que $\forall t \in [x, 2x], \ 0 \leq f(t) - \frac{1}{1+t} \leq \frac{e^{-t}}{1+x-e^{-x}}$.

   (b) En déduire que $\Delta(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ quand $x \to +\infty$.

   (c) Montrer que $G(x) - \ell \sim_{x \to +\infty} -\frac{1}{2x}$.