La présentation, la lisibilité et l'orthographe, ainsi que la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (8 points)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $M = (m_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$. On rappelle que

$$\mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}.$$

On définit ainsi une application de $M_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$:

$$\mathrm{Tr} : \ M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad M \mapsto \mathrm{Tr}(M).$$

Le but de l'exercice est d'étudier l'application

$$f : \ M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}), \quad M \mapsto \mathrm{Tr}(A)\, M - \mathrm{Tr}(M)\, A,$$

où A est une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ fixée vérifiant $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.

1. **Partie 1 : questions préliminaires**
   (a) Montrer que Tr est linéaire. Quelle est la nature de cette application linéaire ?
   (b) Montrer que f est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$.
2. **Partie 2 : étude d'un exemple**
   Dans cette partie, $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer $f(M)$ pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.
   (b) En déduire des bases de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
3. **Partie 3 : cas général**
   On revient au cas général, $n \geq 2$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$ fixé vérifiant $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.
   (a) Montrer que si une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ est dans $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$, alors $M \in \mathrm{Vect}(A)$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(A)$.
   (c) Déterminer $\mathrm{Im}(\mathrm{Tr})$ puis en déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$.
   (d) En déduire alors que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$.

Exercice 2 (12 points)

1. **Partie 1 : un résultat préliminaire.**
   Soit v un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 3. On suppose que v est de rang 2 avec $v^2 \neq 0_E$ et $\mathrm{Ker}(v^2) \neq \mathrm{Ker}(v)$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(v) \subseteq \mathrm{Ker}(v^2)$.
   (b) Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(v^2)$.
   (c) Soit x un vecteur de $\mathrm{Ker}(v^2)$ qui n'appartient pas à $\mathrm{Ker}(v)$. Montrer que la famille $(x, v(x))$ est une base de $\mathrm{Ker}(v^2)$.
2. **Partie 2 : étude d'un endomorphisme**
   Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. On note I_d l'application identité de $\mathbb{R}^3$ et I la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$. On note enfin $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $A - \lambda I$ est inversible si et seulement si $\lambda \neq 2$ et $\lambda \neq 3$.

(b) Calculer les rangs des matrices $A - 2I$ et $A - 3I$.

(c) Justifier que $\mathrm{Ker}((f - 2I_d)^2) \cap \mathrm{Ker}(f - 3I_d) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

(d) Calculer la matrice $(A - 2I)^2$ et déterminer son rang.

(e) En déduire que $\mathrm{Ker}((f - 2I_d)^2) \oplus \mathrm{Ker}(f - 3I_d) = \mathbb{R}^3$.

(f) Déterminer un vecteur e_3 de $\mathrm{Ker}(f - 3I_d)$ de la forme $(1, *, *)$ et un vecteur e_2 de $\mathrm{Ker}((f - 2I_d)^2)$ de la forme $(1, 1, *)$.

(g) On pose $e_1 = f(e_2) - 2e_2$; à l'aide de la partie 1, justifier que $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(h) Déterminer la matrice de T de f dans cette nouvelle base $\mathcal{C}$.