DS Physique 2

Pour info : lors de la session 2023, j'ai publié sans faire exprès le sujet à l'avance. J'ai dû en créer un en urgence, celui que vous voyez ici.

Calculatrice interdite, sans document, durée : 2h, Encadrez vos résultats. Toute valeur numérique donnée sans unité sera considérée comme erronée.

Exercice 1 – Application du cours

1. Donner l'expression générale de la poussée d'archimède en expliquant la signification de chacun des symboles que vous utilisez.
2. Faire un schéma représentant les vecteurs de la base polaire-cylindrique. Faire apparaitre sur vos schéma les paramètres ρ, θ et z.
3. Soit un point A de coordonnées polaires ($r_A = a, \theta_A = \theta_0$) et un autre point B de coordonnées cartesiennes ($x_B = 2a, \theta_B = 2\theta_0$). Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans la base polaire en A.
4. Un ressort est ancré au point de coordonnées cartésiennes ($x_a = a, y_b = 2a$), il est également attaché au point B de coordonnées cartésiennes ($x_b = 2a, y_b = -a$). Si ce ressort est de raideur k et de longueur à vide a, donner, dans la base cartésienne l'expression de la force exercée en A par ce ressort.

Exercice 2 – Skieur

Un skieur considéré comme ponctuel descend une pente qui forme un angle $\beta < \pi/2$ avec l'horizontale, sans jamais décoller.

- Le skieur est de masse m
- On tient compte d'une force de frottement solide de coefficient $f < 1$
- On tient compte d'une force de frottement fluide proportionnel à la vitesse, de coefficient α.
- L'air ne bouge pas dans le référentiel d'étude.

Les valeurs de β, f, α et m sont connues et positives.

1) Donnez l'unité (S.I.) de α et de f.

Puisque une force F en N, soit des $kg.m.s^{-2}$ peut s'écrire αv, $[\alpha] = kg.s^{-1}$

f est sans unité puisque $\|\overrightarrow{R}_\parallel\| = f\|\overrightarrow{R}_\perp\|$ est homogène.

2) Faire un schéma. Vous prendrez comme base ($\overrightarrow{u}_a$, $\overrightarrow{u}_b$) avec $\overrightarrow{u}_a$ parallèle à la pente. Déterminer l'expression du vecteur vitesse lorsque le skieur n'accélère plus.

La condition de non décollage impose que le mouvement est tangent à la pente : $\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{u}_a$

$$\overrightarrow{P} = mg\begin{bmatrix}\sin\beta\\ -\cos\beta\end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{R}_\perp = R_\perp\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{R}_\parallel = -fR_\perp\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{F} = -\alpha v\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

Lorsque le skieur n'accélère plus, $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{R}_\perp + \overrightarrow{R}_\parallel + \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$

Soit :

$$\begin{cases} mg\sin\beta - fR_\perp - \alpha v = 0 \\ -mg\cos\beta + R_\perp = 0 \end{cases} \implies v = \frac{mg}{\alpha}(\sin\beta - f\cos\beta)$$

Soit finalement :

$$\boxed{\overrightarrow{v} = \frac{mg}{\alpha}(\sin\beta - f\cos\beta)\overrightarrow{u}_a}$$

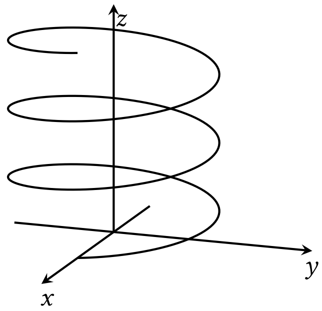
3) Montrer qu'à partir d'un angle trop faible, à l'équilibre, le skieur ne bouge pas. Déterminer l'expression de cet angle β_{min}.

si $\tan\beta = f$ *alors la vitesse s'annule. Il n'y donc mouvement que si :* $\beta > \arctan f$

$$\boxed{\beta_{min} = \arctan f}$$

Exercice 3 – Descente d'un toboggan

Un toboggan forme un tire-bouchon, tel que les points $M = (\rho, \theta, z)$, repéré en cylindriques, appartenant au toboggan vérifient :



$$\rho = R \qquad et \qquad z = h\theta$$

Un point parcourt ce toboggan de telle sorte que la norme de sa vitesse augmente régulièrement :

$$v = a_0 t$$

R, h et a_0 sont des constantes positives connues.

1) Donner l'expression de la vitesse angulaire $\dot{\theta}(t)$ en fonction du temps.

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ R\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{bmatrix}$$

$$v = \sqrt{(R\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)}$$

$$v = \sqrt{(R\dot{\theta})^2 + \left(h\dot{\theta}\right)^2}$$

$$a_0 t = \dot{\theta}\sqrt{R^2 + h^2}$$

$$\dot{\theta} = \frac{a_0 t}{\sqrt{R^2 + h^2}}$$

2) Déterminer l'expression du vecteur accélération.

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} -r\dot{\theta}^2 \\ r\ddot{\theta} \\ \ddot{z} \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} -R\left(\frac{a_0 t}{\sqrt{R^2+h^2}}\right)^2 \\ R\frac{a_0}{\sqrt{R^2+h^2}} \\ h\frac{a_0}{\sqrt{R^2+h^2}} \end{bmatrix}$$

3) Déterminer la norme de l'accélération. Vous pouvez si vous le souhaitez introduire $\gamma \overset{\text{def}}{=} \frac{a_0}{\sqrt{R^2+h^2}}$ pour simplifier les écritures.

$$a^2 = (-r\dot{\theta}^2)^2 + (r\ddot{\theta})^2 + \ddot{z}^2$$

$$a^2 = \left(-R\frac{(a_0 t)^2}{R^2 + h^2}\right)^2 + \left(R\frac{a_0}{\sqrt{R^2 + h^2}}\right)^2 + \left(\frac{h a_0}{\sqrt{R^2 + h^2}}\right)^2$$

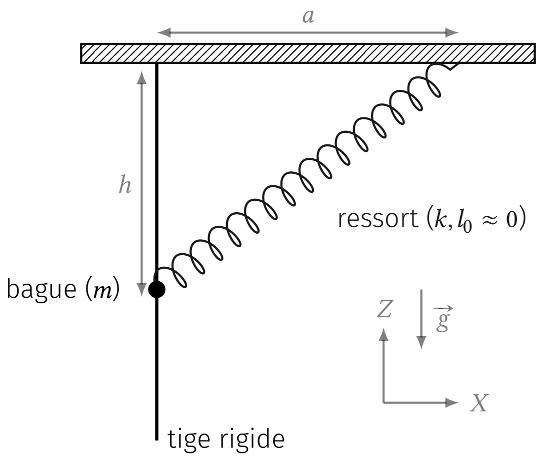
$$a^2 = \frac{(R a_0)^2}{R^2 + h^2}\left(\frac{a_0^2 t^4}{R^2 + h^2} + 1 + \frac{h^2}{R^2}\right)$$

$$a = \frac{R a_0}{\sqrt{R^2 + h^2}}\sqrt{\left(\frac{a_0^2 t^4}{R^2 + h^2} + 1 + \frac{h^2}{R^2}\right)}$$

ou bien

$$a = R\gamma\sqrt{\left(\gamma^2 t^4 + 1 + \frac{h^2}{R^2}\right)}$$

Exercice 4 – Ressort



Une bague de masse m coulisse **sans frottement** sur une barre verticale fixe et est aussi attachée à un ressort (constante de raideur k, longueur au repos très petite : $l_0 = 0$) fixé à un mur comme sur la figure ci-contre. a est une longueur connue.

1) Quel est le lien entre la longueur du ressort et la hauteur h ?

$$l = \sqrt{h^2 + a^2}$$

2) Faire l'inventaire des forces s'exerçant sur la bague.

La réaction de la tige : $\vec{R} = -R\vec{u}_x$, *le poids* $\vec{P} = m\vec{g}$, *la force de rappel du ressort* $\vec{F}_r = -kl\vec{u}$. *avec* $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{h^2+a^2}}\begin{bmatrix} -a \\ -h \end{bmatrix}$

3) Déterminer h à l'équilibre, ainsi que la norme de chaque force à l'équilibre, en fonction des données du problème.

À l'équilibre,

$$\begin{bmatrix} 0 = -R + ka \\ 0 = -mg + kh \end{bmatrix}$$

Donc

$$R = ka$$

$$P = mg$$

$$F_r = k\sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + a^2}$$

4) Même question si la longueur au repos est $l_0 = 2a$