DS Physique 4

Calculatrice interdite, sans document, durée : 2h30, Encadrez vos résultats. Toute valeur numérique donnée sans unité sera considérée comme erronée.

Exercice 1 – Cours

Questions de cours :

1. Énoncer le théorème du moment cinétique, en donnant la définition des termes que vous utilisez.
2. Donner la définition d'une variation infinitésimale dV de potentiel entre deux points très proches.
3. Donner l'expression de la résistance d'un résistor cylindrique parcouru par un courant longitudinal. Préciser la signification des termes utilisés.
4. En électricité, quelle est la définition de la puissance absorbée par un dipôle ?

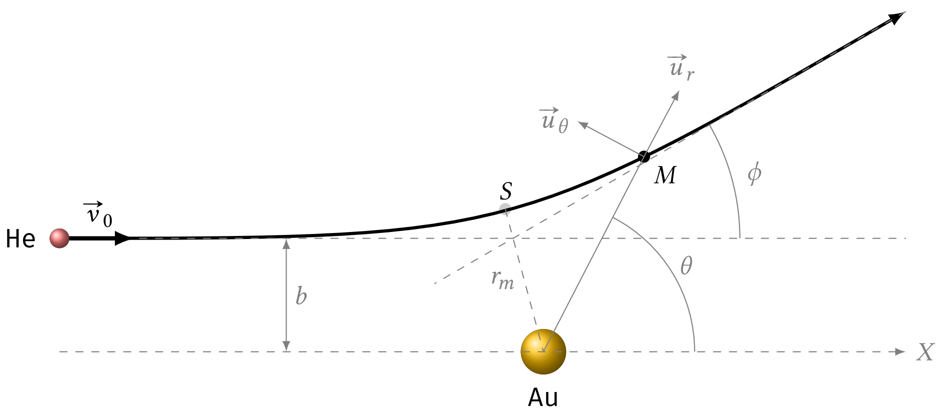
Exercice 2 – Diffusion de Rutherford

Dans l'expérience historique de "Rutherford", un faisceau de particules alpha (noyaux d'hélium 4 : ${}^4_2He$), ayant toutes la même énergie cinétique est lancé contre une mince feuille d'or. La majorité des particules alpha traversent la feuille d'or (${}^{196}_{79}Au$), mais une faible proportion d'entre elles "rebondit" sur celle-ci. On suppose l'existence de noyaux d'atomes d'or très massifs (par rapport à une particule alpha). On étudie le mouvement de cette particule à proximité du noyau.

Le noyau d'or, de charge positive ponctuelle $Z \times e$ (avec $Z = 79$) est supposé ponctuel et immobile, situé en O . On suppose que la particule alpha située en M , de masse m, de charge $q_\alpha = +2e$ vient d'un point très éloigné de O avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$. On désigne par b l'ordonnée de la particule à l'instant initial. On repère la position du point M par le vecteur position $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$.

Au plus proche de O, la particule est en S. La distance minimale en ce point est notée r_m.

Sont connus : Z, e et v_0. On néglige totalement les effets de la gravité, et on ne considère aucun frottement.



Partie I

1. Quelle différence voyez vous avec le mouvement d'un satellite à proximité d'une planète ? Quel est le type de trajectoire suivie par la particule alpha ?

   Force répulsive au lieu d'attractive. Amplitude de la force différente. Sinon, tout est identique. On peut donc penser que les trajectoires seront similaires, i.e. des coniques. Ici on peut penser à une hyperbole.

2. Montrer que la force électrique qu'exerce l'atome d'or sur la particule alpha dans la base cylindrique s'exprime : $\vec{F} = \frac{K}{r^2}\vec{u_r}$, en précisant l'expression de K. Vous pouvez utiliser la constante K dans tout le reste de l'énoncé.

$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Ze^2}{r^2}\vec{u}_r = \frac{K}{r^2}\vec{u}_r$$

3. Exprimer le travail de cette force entre d'un point $A(r_A, \theta_A, 0)$ à un point $B(r_B, \theta_B, 0)$ quelconques.

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \frac{K}{r^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dr \\ rd\theta \\ dz \end{bmatrix} = -K\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

4. En déduire que l'énergie potentielle associée à cette force peut s'écrire :

$$E_p = \frac{K}{r}$$

Au vu de la question précédente, l'énergie potentielle peut s'écrire :

$$E_p = \frac{K}{r} + cste$$

Si on choisit l'énergie de telle sorte que l'énergie potentielle d'un objet situé infiniment loin soit nulle, alors $cste = 0$

5. Montrer que le moment cinétique de la particule alpha par rapport au point O est une constante.

   TMC, moment de la force électrique est nul car la force est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$

6. Montrer que le mouvement de la particule est plan.

   Moment cinétique constant, et $\vec{v}$ *perpendiculaire à ce vecteur. Même preuve que pour les planètes.*

7. Donner l'expression du moment cinétique en fonction de r, $\dot{\theta}$ et m, dans la base cylindrique.

$$\vec{L} = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z$$

8. À l'instant initial, la particule se trouve au point de coordonnées cartésiennes $x = X_0, y = b, z = 0$. Son vecteur vitesse est $\vec{v}(0) = v_0\vec{u}_x$. Montrer que le moment cinétique est :

$$\vec{L} = -mbv_0\vec{u_z}$$

En déduire une relation entre r, $\dot{\theta}$, b et v_0

En cartésien :

$$\vec{L} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = m \begin{bmatrix} -X_0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

soit :

$$\vec{L} = -mbv_0\vec{u}_z$$

Or on peut faire coïncider l'axe $\vec{u_z}$ *des cartésiennes avec celui des cylindriques. Donc :*

$$r^2\dot{\theta} = -bv_0$$

9. Donner l'expression de l'énergie mécanique totale, en fonction de r, $\dot{r}$, θ, $\dot{\theta}$ et des données.

$$E_m = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\right) + \frac{K}{r}$$

Comme il n'y a pas de forces non conservatives (i.e. de frottements), cette quantité est conservée.

10. En remarquant qu'au point S, la vitesse est perpendiculaire au vecteur position, déterminer l'expression de v_s la norme de la vitesse au point S, en fonction de b, v_0 et r_m.

$$v_s = |r_m\dot{\theta}_m| = r_m\frac{bv_0}{r_m^2} = \frac{bv_0}{r_m}$$

11. Que vaut l'énergie mécanique initiale ? On rappelle qu'à l'instant initial, la particule est quasiment à une distance infinie de O.

$$E_m = \frac{1}{2} m v_0^2$$

12. Utiliser le théorème de l'énergie mécanique pour trouver une équation du second degré portant sur r_m. Vous présenterez cette équation en faisant en sorte que le coefficient associé à r_m^2 soit 1.

La conservation de l'énergie mécanique entre l'instant initial et le moment où le point est en S donne :

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_s^2 + \frac{K}{r_m}$$

ce qui mène à :

$$r_m^2 - \frac{2K}{m v_0^2} r_m - b^2 = 0$$

13. Montrer soigneusement que cette équation n'admet qu'une seule solution, et donner son expression, en fonction de K, m, v_0, et b. *Cette équation admet deux solutions réelles (le discriminant est toujours positif). La racine :*

$$r_{neg} = \frac{K}{m v_0^2}\left(1 - \sqrt{1 + \left(\frac{b m v_0^2}{K}\right)^2}\right)$$

ne peut pas être solution, car elle est négative : $\sqrt{1 + \left(\frac{b m v_0^2}{K}\right)^2}$ est plus grand que 1. Or, la grandeur r est une longueur, nécessairement positive. L'unique racine possible est donc :

$$r_m = \frac{K}{m v_0^2}\left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{b m v_0^2}{K}\right)^2}\right)$$

Partie II

La valeur de b est difficile à connaitre. Toutefois, l'angle ϕ est facile à mesurer. Le but de cette partie est de trouver une relation entre ϕ et b.

14. Donner l'expression générale du PFD, en utilisant uniquement les symboles : $\vec{v}$, m, r, $\vec{u}_r$, K et $\frac{d}{dt}$.

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{K}{r^2}\vec{u}_r$$

15. Donner l'expression de $\vec{u}_r \cdot \vec{u}_x$ en fonction de θ.

$$\vec{u}_r \cdot \vec{u}_x = \cos\theta$$

16. On appelle v_x la composante de la vitesse sur $\vec{u}_x$. En vous aidant de la réponse à la question 8, montrer que :

$$m\dot{v}_x = -\frac{K}{b v_0}\dot{\theta}\cos\theta \tag{0.1}$$

17. Que vaut la norme de la vitesse de la particule quand $t \to \infty$?

Par conservation de l'énergie

$$v = v_0$$

18. Intégrer par rapport au temps, les deux termes de l'équation 0.1, entre $t = 0$ et $t \to \infty$. En déduire que la relation entre b et ϕ est :

$$\tan\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{K}{b m v_0^2}$$

Relations trigo utiles : $\cos\phi - 1 = -2\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)$ *et* $\sin\phi = 2\cos(\frac{\phi}{2})\sin(\frac{\phi}{2})$

En intégrant :

$$m\left[v_x\right]_0^\infty = -\frac{K}{bv_0}\left[\sin\theta\right]_0^\infty$$

Or, $v_x(0) = v_0$, $v_x(\infty) = v_0\cos\phi$ *et* $\sin\theta(0) = 0$, $\sin\theta(\infty) = \sin\phi$

$$mv_0(\cos\phi - 1) = -\frac{K}{bv_0}\sin\phi$$

En rajoutant les relations trigo, on trouve bien :

$$\tan\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{K}{bmv_0^2}$$

19. Déduire des réponses aux questions 13 et 18 que :

$$r_m = \frac{K}{mv_0^2}\left(1 + \frac{1}{\sin(\frac{\phi}{2})}\right)$$

Dans :

$$r_m = \frac{K}{mv_0^2}\left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{bmv_0^2}{K}\right)^2}\right)$$

On remplace $\left(\frac{bmv_0^2}{K}\right)^2$ *par son expression fraichement trouvée.*

$$r_m = \frac{K}{mv_0^2}\left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\tan\frac{\phi}{2}}\right)^2}\right)$$

$$r_m = \frac{K}{mv_0^2}\left(1 + \sqrt{\frac{1}{\sin^2\phi/2}(\sin^2\phi/2 + \cos^2\phi/2)}\right)$$

$$r_m = \frac{K}{mv_0^2}\left(1 + \frac{1}{|\sin\frac{\phi}{2}|}\right)$$

20. Quelle est la valeur de ϕ lorsque r_m est minimum? *On cherche le minimum de r_m en fonction de ϕ en résolvant :*

$$\frac{dr_m}{d\phi} = 0$$

$$-\frac{K}{mv_0^2}\frac{1}{2}\frac{\cos\phi/2}{\sin^2\phi/2} = 0$$

Cette équation est possible si $\frac{\phi}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi$

C'est à dire si $\phi = \pi$

21. Quelle est l'expression de r_m alors? AN : $K = 3 \cdot 10^{-26}$ *SI*, $m = 6 \cdot 10^{-27} kg$, $v_0 = 1000\ m.s^{-1}$.

On a alors $r_m(min) = \frac{2K}{mv_0^2} = 10^{-5}\ m = 10\ \mu m$ *Même avec une particule très rapide, elle ne s'approche que de très loin du noyau.*

22. Quelle est la valeur de b dans le cas où la distance d'approche r_m est minimale? *Si on reprend l'expression qui relie ϕ à b (question 18), et que l'on injecte $\phi = \pi$:*

$$b = \frac{K}{mv_0^2}\frac{\cos\pi/2}{\sin\pi/2}$$

$$b = 0$$

23. Tracer l'allure de la trajectoire dans ce cas.

C'est la situation où la particule arrive directement sur le noyau ($b = 0$) et reparu directement dans le sens opposé, en s'approchant au mieux de $r_m(min)$