DS Physique 7: Méca Solide et Thermo

Durée : 2h

$$R = \mathcal{N}_a \times k_b = 8.3\ J.K^{-1}.mol^{-1} \qquad \mathcal{N}_a = 6 \times 10^{23}\ mol^{-1}$$

Exercice 1 — Thermo.

Soit une enceinte cylindrique de base $S = 2\ cm^2$ et de hauteur initiale $h = 0.3\ m$. Cette enceinte est fermée. L'une des faces de l'enceinte est un piston mobile. Cette enceinte contient un gaz parfait monoatomique, initialement à la pression $P_0 = 1\ bar$. Le tout est à l'équilibre thermique avec l'extérieur qui est à la température $T = 300\ K$.

1. Quelle est la quantité de matière n initiale contenue dans l'enceinte ?

$$n = \frac{P_0 Sh}{RT} = \frac{10^5 \times 2 \times 10^{-4} \times 0.3}{8.31 \times 300} \approx 2.5 \times 10^{-3} mol$$

2. Quelle est l'énergie interne du gaz contenu dans l'enceinte ?
   $U = \frac{3}{2} nRT = \frac{3}{2} P_0 Sh$

On souhaite appuyer sur le piston jusqu'à ce que la pression à l'intérieur de l'enceinte soit $P = 2P_0$, le gaz restant à l'équilibre thermique avec l'extérieur dans l'état final.

3. Quelle distance doit parcourir le piston ?

$$P = \frac{nRT}{V} = \frac{2nRT}{V_0 - S\delta} \Rightarrow S\delta = \frac{V_0}{2} \Rightarrow \delta = \frac{V_0}{2S} = 0.15\ m$$

On bloque le piston dans cette position, puis on place le cylindre dans une grand volume complètement vide. On perce alors un petit trou de section σ par lequel les molécules de gaz vont s'échapper. On suppose que toutes les molécules ont la même vitesse v, et qu'elles se déplacent de façon équiprobables dans les directions $\pm\vec{u_x}$, $\pm\vec{u_y}$ et $\pm\vec{u}_z$. La masse molaire du gaz est M.

4. Quelle est la masse d'une molécule ?

$$m = \frac{M}{\mathcal{N}_a}$$

5. Donner la vitesse v des molécules en fonction de la température de l'enceinte. Donner votre réponse en fonction de R, T et M.
   Par équi-partition de l'énergie, on a:

$$v = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

6. Déterminer le nombre dN de molécules de gaz qui va s'échapper pendant une durée dt, en fonction de N le nombre de molécules présentes dans l'enceinte et des données.

$$dN = -\frac{\sigma v}{3V_0} N dt$$

7. En déduire que la quantité de gaz dans l'enceinte va décroître exponentiellement en fonction du temps selon la loi:

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

où τ et N_0 sont à déterminer.

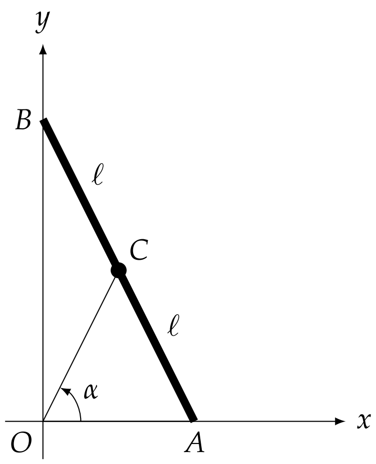
8. Combien de temps faut-il pour que la pression soit revenue à P_0 dans l'enceinte ?

$$P(t) = \frac{N(t)RT}{V} = N_0\frac{RT}{V}e^{-\frac{t}{\tau}} = 2P_0e^{-t/\tau}$$

Donc :

$$t_{P=P_0} = \tau \ln(2)$$

Exercice 2 — Mécanique du Solide.
On souhaite modéliser le glissement d'une échelle contre un mur.
On considère une barre homogène en forme de segment de longueur 2ℓ et de masse totale m (m et ℓ connus). Cette barre est adossée à un mur glissant et posé sur le sol glissant également, et les points de contact de la barre étant sans frottement, celle-ci glisse le long du mur tout en restant en contact avec le sol. On note $\vec{R}_B$ la réaction normale exercée par le mur sur la barre en B, et $\vec{R}_A$ la réaction du sol sur la barre exercée en A.
Lors du déplacement de la barre, on admet que celle ci tourne autour du point C avec un vecteur rotation $\vec{\Omega} = -\dot{\alpha}\vec{u}_z$. Même si l'axe de rotation n'est pas fixe, C se déplace lorsque la barre glisse, on admet que toutes les lois vues dans le cours sont valides (car la direction de l'axe de rotation reste fixe.).
Le but de l'exercice est de déterminer l'angle α pour lequel la barre va quitter le mur en B.



On commence par faire l'étude de la barre seule. On la suppose horizontale.

1. En supposant que l'on connait λ la masse linéique de la barre, exprimer la masse totale m en fonction de λ et de ℓ. En déduire l'expression de λ.
   $m = \int_{x=-\ell}^{\ell} \lambda dx = \lambda 2\ell$

2. Déterminer la position du centre de masse G de la barre.
   G est en C

3. Déterminer le moment d'inertie J de la barre par rapport à C.
   $J = \frac{1}{3}m\ell^2$

On étudie ensuite le mouvement de la barrer lors de son glissement le long du mur (en B) et sur le sol (en A). Initialement, l'angle $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} (\widehat{\vec{u}_x, \vec{OC}})$ vaut α_0 connu.

4. Quel doit être l'orientation et le sens du vecteur rotation de la barre lorsque celle-ci glisse vers le sol ? Commenter le signe négatif qui apparaît dans l'expression de $\vec{\Omega}$ en fonction de $\dot{\alpha}$.
   Lorsque la barre glisse et tombe vers le sol elle tourne autour de $\vec{u_z}$ dans le sens positif. Cela correspond aussi à une diminution de α. Pour que le vecteur rotation soit bien orienté, il faut donc que la composante du vecteur rotation sur $\vec{u_z}$ soit de signe opposé à $\dot{\alpha}$

5. Exprimer OB en fonction de ℓ et α. Même question pour OA.
   $OA = 2\ell\cos\alpha$ et $OB = 2\ell\sin\alpha$

6. En déduire les coordonnées cartésiennes du point C en fonction de α et des données.
   $C = (\ell\cos\alpha, \ell\sin\alpha, 0)$

7. En déduire la vitesse et l'accélération du point C en fonction de α, $\dot{\alpha}$, $\ddot{\alpha}$ et des données.

$$\vec{a} = \ell \begin{bmatrix} -\ddot{\alpha}\sin\alpha - (\dot{\alpha})^2\cos\alpha \\ \ddot{\alpha}\cos\alpha - (\dot{\alpha})^2\sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

8. Faire l'inventaire des actions mécaniques exercées sur la barre, puis appliquer le principe fondamental de la dynamique à la barre.
   $m\overrightarrow{a_G} = \vec{R}_B + m\vec{g} + \vec{R}_A$

9. Exprimer les moments des forces $\overrightarrow{R_A}$ et $\overrightarrow{R_B}$ par rapport au point C, puis appliquer le théorème du moment cinétique en C.
   $-J\ddot{\alpha} = \ell\cos\alpha R_A - \ell\sin\alpha R_B$

10. Déduire du PFD et du TMC que α vérifie:

$$\ddot{\alpha} = -\frac{3g}{4\ell}\cos\alpha$$

11. Multiplier par cette expression par $\dot{\alpha}$ pour en déduire $(\dot{\alpha})^2$ en fonction de α, α_0 et des données.
    $(\dot{\alpha})^2 = \frac{3g}{2\ell}(\sin\alpha_0 - \sin\alpha)$

12. Montrer que la barre quitte le mur en B lorsque $\sin\alpha = \frac{2}{3}\sin\alpha_0$.
    La barre quitte le mur lorsque $R_B = 0$. Le PFD donnait l'expression des réactions en fonction de α et $\dot{\alpha}^2$. On connait peut donc déterminer l'angle α qui annule R_B.