DS Physique 6 : Millenium Bridge

Calculatrice autorisée, sans document, durée : 2h30, Encadrez vos résultats. Toute valeur numérique donnée sans unité sera considérée comme erronée.

Exercice 1 – Questions de cours

Soit un filtre dont la fonction de transfert est : $\underline{H} = \dfrac{j\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$.

1. Donner le comportement asymptotique de ce filtre.
2. De quel type de filtre s'agit-t-il ?
3. Tracer l'allure du Gain en fonction de ω en échelle linéaire, et en échelle log-log.
4. Donner la définition (complexe ou réelle) d'une onde plane d'une quantité A, dans le cas d'une onde qui se propage selon le vecteur d'onde : $\vec{k} = \dfrac{k}{\sqrt{2}}\left(\vec{u}_y - \vec{u}_x\right)$
5. On considère deux signaux $\underline{s_1}$ et $\underline{s_2}$ dont les expressions respectives sont :

$$\underline{s_1} = A_1 e^{i(\omega t + \phi_1)} \quad et \quad \underline{s_2} = A_2 e^{i(\omega t + \phi_2)}$$

Déterminer l'amplitude du signal $\underline{s_1} + \underline{s_2}$

Exercice 2 – Décomposition fréquentielle

On rappelle que les composantes de fourier d'une porte canonique sont :

$$\hat{\pi}(f) = \frac{\sin(\pi f)}{\pi f}$$

On cherche à tracer le spectre d'un signal en dent de scie.

On s'intéresse d'abord à la fonction triangle définie par :

$$Tr(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } |t| > 1\ s \\ 1 + t \text{ si } t \in [-1, 0] \\ 1 - t \text{ si } t \in [0, 1] \end{cases}$$

On admet que les composantes fréquentielles de cette fonction sont données par :

$$\hat{Tr}(f) = \left(\frac{\sin(\pi f)}{\pi f}\right)^2$$

1. Tracer la fonction triangle dans sa représentation temporelle.
2. Sur un même graphique, tracer le spectre d'une fonction porte, ainsi que le spectre de la fonction triangle, en prenant soin de préciser les valeurs où des composantes sont nulles.

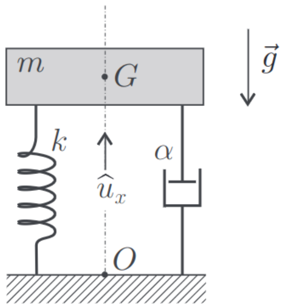
On remarque qu'un signal en dent de scie est en fait un triangle répété à l'infini toutes les deux secondes. Or les composantes d'un signal s répété toutes les T secondes sont toutes nulles à l'exception de celles correspondant à des fréquences multiples de $\dfrac{1}{T}$ qui sont alors égales à $T \times \hat{s}$ (résultat admis).

3. Tracer soigneusement le spectre d'un signal en dent de scie.
4. Commenter l'allure de ce spectre.

Pour marquer le millénaire, une nouvelle passerelle a été construite au-dessus de la Tamise à Londres pour un coût total de plus de 20 millions de Livres Sterling. Quand elle fut ouverte aux piétons, on remarqua très vite qu'elle se balançait latéralement et verticalement en cas de forte affluence. Avec un grand nombre de piétons, son mouvement oblique était tel que la plupart d'entre eux s'arrêtaient et s'accrochaient aux rampes. Des images et des vidéos ont montré que ces mouvements latéraux pouvaient avoir une amplitude moyenne de 75 mm et qu'ils se produisaient avec des fréquences de l'ordre du hertz. Le pont fut donc fermé deux jours après son ouverture au public. Dix-huit mois de recherches furent nécessaires pour résoudre le problème et faire les modifications préconisées par les ingénieurs qui furent donc finalement consultés. La solution consista à ajouter un "amortisseur harmonique" sur le pont.
L'objectif de ce problème est la modélisation simple d'une passerelle piétonne et la compréhension de certains problèmes posés par le Millennium Bridge de Londres. Les vecteurs qui sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires (par exemple : $\hat{u}_x$).

1 Oscillateur libre

On modélise la passerelle originelle par un oscillateur simple. Un oscillateur est constitué d'une masse m dont le centre d'inertie G est repéré par la position x dans le référentiel galiléen $(O, \hat{u}_x)$ – voir figure ci-contre. L'origine O se situe au niveau du sol. L'oscillateur est relié à un support fixe par l'intermédiaire d'un ressort linéaire de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 ainsi que d'un amortisseur linéaire de viscosité α, exerçant sur m une force de frottement $\vec{F}_f = -\alpha\dot{x}\hat{u}_x$, avec $\alpha > 0$. À tout instant t, on assimile la distance OG à la longueur $\ell(t)$ du ressort. L'ensemble est soumis à l'accélération de la pesanteur $\vec{g} = -g\hat{u}_x$.



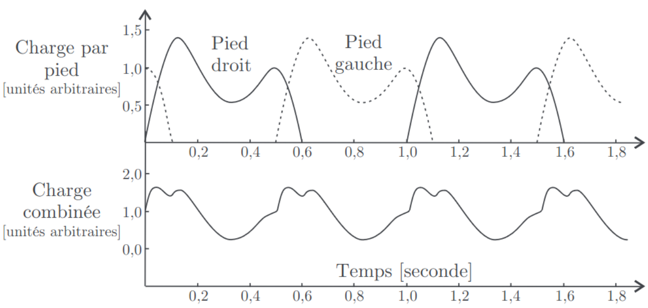
1. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique, établir l'équation différentielle

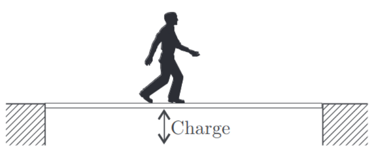
$$\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = 0$$

dans laquelle on a introduit la fonction $X(t) \stackrel{\text{def}}{=} x(t) - \tilde{x}$ où $\tilde{x}$ est une constante que l'on déterminera en fonction de g, ω_0, et ℓ_0. On précisera les expressions et significations de ω_0 et ξ.

2 Description de la marche

Différents cas peuvent être examinés pour l'excitation (ou forçage) $F(t)$ de l'oscillateur étudié. L'action de la marche d'un piéton est caractérisée par un contact continu sur la surface du sol puisque le second pied touche le sol avant que le premier ne le quitte. La force engendrée comprend une composante verticale et une composante horizontale non prise en compte dans cette partie.





Dans le cadre d'un modèle simplifié, nous ignorons les harmoniques contenues dans ce signal, nous représenterons la charge par un vecteur force périodique $\vec{F}(t) = \vec{F}_0 + \vec{F}_1 \cos(2\pi f t)$. Le vecteur $\vec{F}_0$ correspond à la force statique, c'est-à-dire au poids du piéton, la fréquence f correspond à la fréquence fondamentale d'une marche normale. Nous considérerons que $\vec{F}_1 = 0.4\vec{F}_0$. Ces deux vecteurs seront supposés constants et orientés selon $-\hat{u}_x$. On note $F_0 = \|\vec{F}_0\|$ le module de la force statique. On appelle "réponse en déplacement" la grandeur Y définie par $Y \stackrel{\text{def}}{=} X + \frac{F_0}{m\omega_0^2}$.

2. Transformer l'équation différentielle portant sur X en une autre portant sur Y lorsqu'un piéton marche sur le pont.

La grandeur $E \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{F_1}{m}$ est sinusoïdale, de pulsation ω. Elle servira de référence pour les phases à l'origine. On note donc : $\underline{E} = \dfrac{F_1}{m} e^{i\omega t}$.

3. Établir une relation entre $\underline{Y}$ et $\underline{E}$ valable en régime permanent sinusoïdal.

4. On appelle fonction de transfert $\underline{H}(\omega)$, le rapport de la représentation complexe de la réponse en déplacement $\underline{Y}$ sur la représentation complexe de l'excitation $\underline{E}$. Montrer que cette fonction de transfert prend la forme suivante, (si $\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{\omega}{\omega_0}$) :

$$\underline{H} = \frac{1}{\omega_0^2\left((1-\Omega^2) + i2\xi\Omega\right)}$$

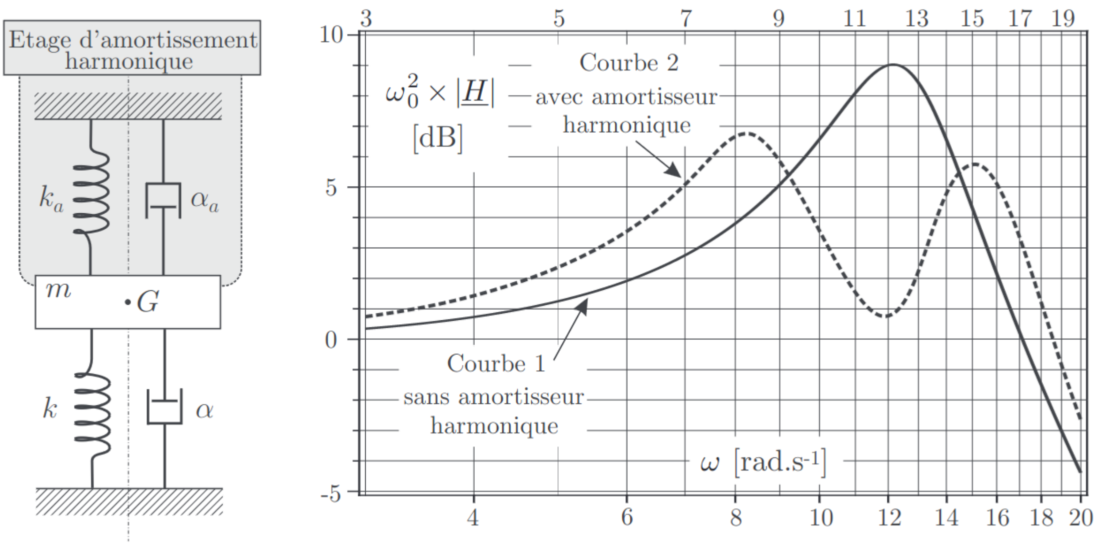
5. Donner l'expression du gain en amplitude $G \stackrel{\text{def}}{=} |\underline{H}|$ en fonction de Ω.

6. Donner le comportement asymptotique du gain lorsque $\Omega \ll 1$ et $\Omega \gg 1$

7. Sous quelle condition portant sur ξ, un phénomène de résonance peut-il se produire ?

8. Lorsqu'il y a résonance, pour quelle pulsation ω_r obtient-on alors ce phénomène ? Exprimer le gain en amplitude à la résonance $G(\omega_r)$ dans la limite $\xi^2 \ll 1$.

On représente ci-dessous le gain associé à deux modèles différents. La courbe 1 correspond au modèle décrit jusqu'ici. La courbe 2 représente le gain associé au même système auquel on a rajouté un étage "amortisseur harmonique".



9. Toujours en supposant $\xi^2 \ll 1$, déduire de la figure un ordre de grandeur de ω_0 et de ξ.

10. Proposer une explication pour le problème du pont d'origine.

11. Expliquer en quoi l'ajout du dispositif "amortisseur harmonique" permet de résoudre le problème.