DS Physique 9

Durée : 2h

EXERCICE 1 – Questions de cours

1. Donner la relation entre la quantité de mouvement d'une particule et son vecteur d'onde.
2. Donner les relations qui relient les nombres quantiques n, ℓ et m qui apparaissent dans les solutions d'un électron au voisinage d'un noyau.
3. En utilisant les règles de Klechkowski et de Hund, donner la configuration électronique de l'atome de Manganèse : $Z = 25$. Représenter cette configuration dans un diagramme énergétique.

EXERCICE 2 – Particule dans potentiel hyperbolique

Une particule d'énergie totale E évolue dans une énergie potentielle $V(x)$ telle que :

$$V(x) = \begin{cases} +\infty \text{ si } x \leq 0 \\ -\dfrac{\lambda}{x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

où λ est une constante réelle positive. On admet que les fonctions d'ondes sont des fonctions continues. On admet que la fonction d'onde prend la forme : $\psi(x,t) = e^{-i\frac{E}{\hbar}t}\varphi(x)$. Enfin on admet que dans la zone $x \leq 0$, $\varphi(x) = 0$.

1. Quelle est la probabilité de mesurer la particule dans la zone $x \leq 0$?

   Nulle

2. Quelle équation vérifie φ?

$$\varphi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2}(E + \frac{\lambda}{x})\varphi(x) = 0$$

On cherche des solutions de la forme $\varphi(x) = Cxe^{-kx}$.

3. Quelles conditions doivent vérifier k et E pour que ces formes soient solutions ? Rappel : un polynôme est identiquement nul si tous ses coefficients sont nuls.

   On injecte :

$$Ce^{-kx}\left(-2k + 2\frac{m\lambda}{\hbar^2} + (k^2 + \frac{2mE}{\hbar^2})x\right) = 0$$

   Vrai si :

$$\begin{cases} k = \dfrac{m\lambda}{\hbar^2} \\ E = -\dfrac{\hbar^2 k^2}{2m} \end{cases}$$

On suppose la constante C réelle. On donne :

$$\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

4. Déterminer la valeur de C.

   La condition de normalisation de la fonction d'onde donne :

$$\int_0^\infty \varphi^2(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

   Soit :

$$\frac{C^2}{4k^3} = 1$$

Soit .

$$C = 2k^{\frac{3}{2}}$$

Exercice 3 – Atmosphère non-isotherme

Partie 1 :

Le but de cette partie est de montrer qu'une petit bulle d'air légèrement plus chaude que son environnement va s'élever dans l'atmosphère.

Pour simplifier, on s'intéresse à une bulle de savon contenant de l'air. On suppose ce système fermé. On néglige la masse du film de savon. On commence par supposer la bulle de savon cubique, de côté a. On suppose que le cube est de telle sorte l'une de ses faces est parallèle au sol, située à une altitude z_0 et que la face opposée est située à l'altitude $z_0 + a$. On suppose par ailleurs que la pression vérifie la loi :

$$p = p_0 - \rho g z \tag{a}$$

où ρ est une constante.

1. Quelle est la résultante des forces de pression exercée sur la face située en z_0. Quelle est la résultante des forces de pression exercée sur la face située en $z_0 + a$?

$$\vec{F}_{z_0} = +(p_0 - \rho g z_0)a^2\vec{u}_z$$

$$\vec{F}_{z_0+a} = -(p_0 - \rho g(z_0 + a))a^2\vec{u}_z$$

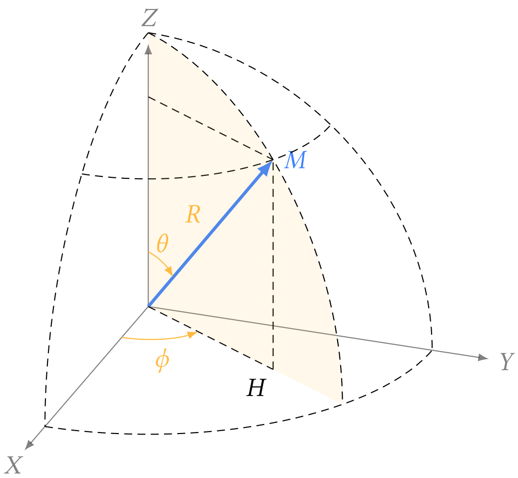
2. En déduire la résultante totale des forces de pression. Quel résultat bien connu retrouvez vous ? *Les forces sur les autres parois du cube se compensent.*

$$\vec{F}_p = +\rho g a^3\vec{u}_z$$

On retrouve Archimède

3. A quelle condition sur ρ_a la masse volumique de l'air à l'intérieur de la bulle, est-ce que la bulle de savon va s'élever en altitude ?

Le modèle de la bulle cubique étant peu crédible, on essaie maintenant avec un modèle de bulle sphèrique. On suppose maintenant la bulle spherique de rayon R. On se place en coordonnées sphèriques, centrée sur la bulle. La bulle a son centre en $z = 0$ (mais elle reste entourée totalement d'air).



4. Donner l'expression d'un petit élément dS de surface de la bulle, en fonction de R, θ, dθ et dϕ

5. Montrer que la projection sur $\vec{u}_z$ de la résultante des forces de pression est :

$$F_z = -\iint_{\theta\in[0,\pi],\phi\in[0,2\pi]} (p_0 - \rho g R\cos\theta)R^2\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

6. En déduire la résultante des forces de pression exercée sur la bulle d'air. Quel résultat bien connu retrouvez vous ? *L'intégration sur ϕ fait apparaitre 2π L'intégrale impliquant p_0 s'annule car $[\frac{1}{2}sin^2(\theta)]_0^\pi = 0$*

   L'autre intégrale fait apparaitre $[-\frac{1}{3}\cos^3(\theta)]_0^\pi = \frac{2}{3}$, il reste :

$$F_z = \rho g \frac{4}{3}\pi R^3$$

   On retrouve Archimède

PARTIE 2 :

Le but de cette partie est de trouver d'où sort l'expression de la pression évoquée en première partie (équation (a)). Cette expression est identique à la pression dans un fluide de masse volumique constante. L'air n'est toutefois pas un fluide de masse volumique constante. Nous allons chercher sur quelle échelle de z, on peut se permettre de faire l'approximation du fluide de masse volumique constante. On étudie l'ascension d'une particule de volume mésoscopique V depuis la surface de la Terre $z = 0$ à la pression p_0 et à la température T_0 jusqu'a l'altitude z quelconque. On suppose que l'ascension de cette "bulle" d'air se fait de façon adiabatique, et mécaniquement réversible. On note $\vec{g} = -g\vec{u}_z$. On note $\rho(z)$ la masse volumique, et on note $p(z)$ la pression à l'altitude z. On note M_a la masse molaire de l'air. Enfin, on note γ le rapport isentropique de l'air.

7. Donner la projection verticale de relation de la statique des fluides.

$$-p'(z) - \rho(z)g = 0$$

8. En supposant l'air comme un gaz parfait, donner la relation entre la pression et la masse volumique.

$$pV = nRT \implies p = \rho\frac{RT}{M_a}$$

9. L'ascension est supposée adiabatique et réversible. En déduire que :

$$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} \tag{1}$$

   Indice : utiliser une quantité conservée pour une transforamation adiabatique réversible d'un gaz parfait, prendre le logarithme de cette relation et dériver.

$$T^\gamma P^{1-\gamma} = cste \implies \gamma\ln(T) + (1-\gamma)\ln(P) = \ln(cste)$$

   On dérive par rapport à z pour obtenir l'expression voulue

10. En déduire que :

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = -\frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{M_a g}{R}$$

11. On dit usuellement que la température varie de $0.6°C$ tous les $100\ m$. Par ailleurs, on donne la valeur numérique de $\Gamma \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{M_a g}{R} = 0.01\ SI$. Exprimer $T(z)$ en fonction de T_0, Γ et z et commenter.

$$T(z) = T_0 - \Gamma z$$

12. En reprenant la relation (1) et la question précédente, déterminer $p(z)$. La mettre sous la forme :

$$p(z) = p_0\left(1 - \frac{\Gamma}{T_0}z\right)^{\frac{M_a g}{\Gamma R}}$$

$$(1) \implies \frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{Mg}{R}\frac{\mathrm{d}z}{T_0 - \Gamma z}$$

On intègre de la surface jusqu'à une altitude z quelconque :

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{Mg}{R}\left(-\frac{1}{\Gamma}\right) \ln \frac{T_0 - \Gamma z}{T_0}$$

On obtient le résultat voulu en prennant l'exponentielle de cette relation.

13. En déduire l'expression de $p(z)$, lorsque z est petit devant T_0/Γ.

14. Comparer votre résultat à l'expression utilisée dans la partie 1.

15. Jusqu'à quelle altitude z est-ce que le critère $z \ll \dfrac{T_0}{\Gamma}$ est il valide ?