DS Physique 1

EC : Mécanique

Durée : 3h. Aucun document autorisé. Calculatrice interdite. Encadrer les résultats. Utilisez des expressions littérales, sauf si on vous demande explicitement une valeur numérique. On rappelle que $c = 3 \times 10^8$ m s^{-1}

1 Application directe du cours

On s'intéresse à une onde de champ électromagnétique, telle que :

$$\vec{E} = E_0 \vec{u}_z \cos(\alpha(x - \beta t))$$

Avec $E_0 = 120$ V m^{-1}, $\alpha = 2\times10^7$ unité S.I., $\beta = 2\times10^8$ unité S.I.. Donnez vos réponses en fonction des données !

1. Quelle est l'expression de la pulsation temporelle de cette onde ?

$$\omega = \alpha\beta$$

ou bien

$$\omega = -\alpha\beta$$

Les deux réponses sont acceptées, même si la réponse positive est plus "naturelle"

2. Quelle est l'expression de la pulsation spatiale de cette onde ?

$$k = \alpha$$

3. Quelle est l'expression de la vitesse de phase de cette onde ?

$$v_\phi = \beta$$

4. Quelle est la valeur numérique de l'indice de réfraction de ce milieu ?

$$n = \frac{c}{v_\phi} = 1.5$$

On s'intéresse à une lentille mince de focale $f' = -10\ a$, où $a = 1\ cm$. L'axe optique, horizontal, est orienté de la gauche vers la droite. La lentille mince a son centre optique placé en O. Un point objet B de position inconnue forme, par la lentille mince, une image $B' = (x_{B'} = -5a, y_{B'} = +2a)$. On appelle A' le projeté de B' sur l'axe optique.

5. Cette lentille est-elle convergente ou bien divergente ? *La lentille est divergente, car f' est négative.*

6. Exprimer $\overline{OA'}$ en fonction de a

$$\overline{OA'} = -5a$$

7. Déterminer la position du point objet B : donnez les coordonnées de ce point en fonction de a.

$$\text{conj.} \implies \overline{OA} = \frac{f'\overline{OA'}}{f' - \overline{OA'}}$$

$$x_A = -10a$$

Par ailleurs :

$$\text{Loi grandissement} \implies \overline{AB} = 4a$$

Soit finalement :

$$B = (-10a, 4a)$$

2 Preuve de la relation de conjugaison d'une lentille mince

Le but de cette partie est de redémontrer la relation de conjugaison au centre pour une lentille mince.

8. Rappeler la relation de conjugaison qui relie un point objet A à son image A' pour une lentille mince de centre O, de focale f'.

On suppose que les lentilles considérées sont formées par des dioptres sphériques. On commence par s'intéresser à un unique dioptre sphérique $\mathscr{D}_1$, qui sépare un premier milieu homogène d'indice $n_1 = 1$ (de l'air) d'un second milieu homogène d'indice $n_2 = 1.5$ (du verre). On note C_1 le centre de courbure du dioptre et S_1 l'intersection du dioptre avec l'axe optique. On se place dans un cas où $R_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \overline{S_1C_1} > 0$.

Soit A_1 un point situé sur l'axe optique. On s'intéresse à un rayon lumineux, émis de A_1, incident sur le dioptre $\mathscr{D}_1$ en un point I_1. On cherche à déterminer la position du point B, l'intersection du rayon transmis avec l'axe optique.

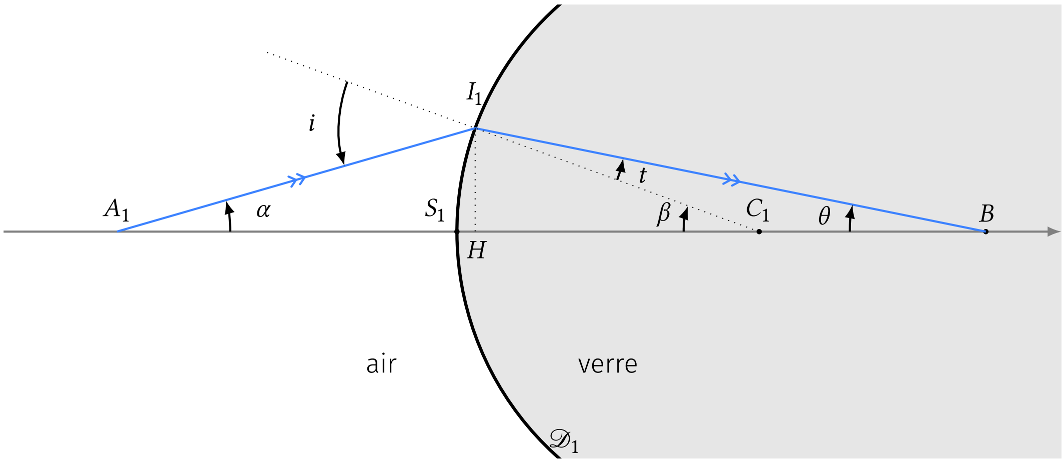

Figure 1 – Passage d'un rayon à travers un dioptre sphérique. Les angles ont été nommés et orientés pour vous.

9. Établir une relation simple entre i, α et β. Exprimer i en fonction de α et β.

Dans le triangle $A_1C_1I_1$, la somme des angles, comptée dans le sens positif, est égale à π, donc :

$$\alpha + (-\beta) + (\pi - i) = \pi$$

Donc :

$$i = \alpha - \beta$$

10. Établir une relation simple entre t, θ et β. Exprimer t en fonction de θ et β.

Dans le triangle BC_1I_1, la somme des angles, comptée dans le sens positif, est égale à π, donc :

$$-\theta + t + (\pi + \beta) = \pi$$

Donc :

$$t = \theta - \beta$$

Dans la suite, on suppose que les rayons incidents sur le dioptre sont paraxiaux.

11. Que peut-on dire de H, projeté de I_1 sur l'axe optique dans le cas de rayons paraxiaux ?

H est confondu avec I_1

12. Donner une approximation de α en fonction de $h \stackrel{\text{déf}}{=} \overline{S_1I_1}$ et de $p \stackrel{\text{déf}}{=} \overline{S_1A_1}$.

$$\alpha \approx \frac{\overline{S_1I_1}}{\overline{A_1S_1}} = -\frac{h}{p}$$

13. De même, exprimer β en fonction de h et $R_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \overline{S_1C_1}$ ainsi que θ en fonction de h et $q \stackrel{\text{déf}}{=} \overline{S_1B}$.

$$\beta = -\frac{h}{R_1}$$

et

$$\theta = -\frac{h}{q}$$

On note $\Delta n \stackrel{\text{def}}{=} n_2 - n_1$

14. Utiliser la loi de la réfraction en I_1, l'approximation des petits angles, ainsi que les résultats précédents pour en déduire la "relation de conjugaison d'un dioptre sphérique" :

$$-\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{\Delta n}{R_1}$$

c'est à dire :

$$-\frac{n_1}{\overline{S_1 A_1}} + \frac{n_2}{\overline{S_1 B}} = \frac{\Delta n}{R_1} \tag{1}$$

loi de la réfraction :

$$n_1 \sin i = n_2 \sin t$$

Petits angles :

$$n_1 i = n_2 t$$

Résultats précédents :

$$n_1 \left(-\frac{h}{p} + \frac{h}{R_1} \right) = n_2 \left(-\frac{h}{q} + \frac{h}{R_1} \right)$$

donc :

$$n_1 \left(-\frac{1}{p} + \frac{1}{R_1} \right) = n_2 \left(-\frac{1}{q} + \frac{1}{R_1} \right)$$

donc :

$$\left(-\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} \right) = \frac{1}{R_1}(n_2 - n_1)$$

Comme la relation établie ici est indépendante de la position de I_1, on admet que tous les rayons émis depuis A_1, après passage par le dioptre, passent par le même point B.

15. En déduire un qualificatif approprié pour le système optique "dioptre sphérique". Quelle est le statut du point A_1 par rapport au dioptre $\mathscr{D}_1$? Quel est le statut du point B par rapport au dioptre $\mathscr{D}_1$?

Le dioptre sphérique est stigmatique dans les conditions de Gauss.

A_1 un point objet, B est un point image par $\mathscr{D}_1$

On admet que la relation de conjugaison d'un dioptre sphérique est valable pour n'importe quel type de dioptre sphérique, donc pour un dioptre convexe également (c'est à dire tel que $\overline{SC} < 0$), sans aucun changement, pour peu que l'on utilise bien des distances algébriques.

Pour terminer la modélisation d'une lentille, on remarque que les rayons qui se croisent en B sont incidents sur un dioptre $\mathscr{D}_2$. Ce dioptre est aussi un dioptre sphérique, de centre C_2, de sommet S_2. À gauche de ce dioptre, c'est toujours du verre, et à droite, on trouve à nouveau de l'air. Après le passage du dioptre, les rayons incidents sont déviés et croisent l'axe optique en A_2'. On note $R_2 \stackrel{\text{def}}{=} \overline{S_2 C_2}$. Les rayons sont toujours paraxiaux.

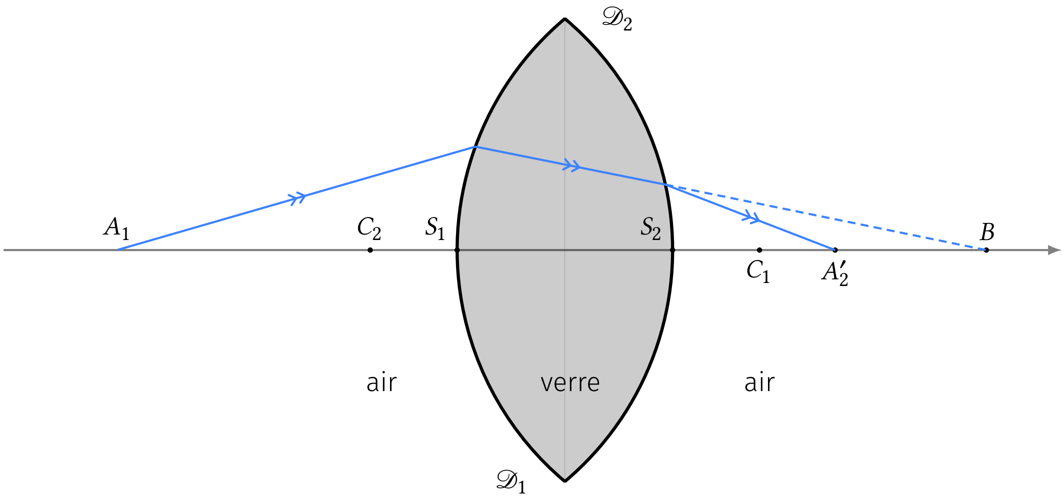

FIGURE 2 – Passage d'un rayon à travers une lentille, succession de deux dioptres sphériques.

16. Quel est le signe de R_2 dans le cas présenté ici ?

$R_2 < 0$

17. Quel est le statut du point B par rapport au dioptre $\mathscr{D}_2$? Quel est le statut de A'_2 par rapport au dioptre $\mathscr{D}_2$?

B est le point objet pour $\mathscr{D}_2$, A'_2 est le point image.

18. Écrire la relation de conjugaison d'un dioptre sphérique (1), mais appliquée cette fois au dioptre sphérique $\mathscr{D}_2$.

$$-\frac{n_2}{\overline{S_2B}} + \frac{n_1}{\overline{S_2A'_2}} = -\frac{\Delta n}{R_2}$$

19. En déduire que :

$$n_1\left(\frac{1}{\overline{S_2A'_2}} - \frac{1}{\overline{S_1A_1}}\right) + \underbrace{n_2\left(\frac{1}{\overline{S_1B}} - \frac{1}{\overline{S_2B}}\right)}_{\gamma} = \Delta n\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

On note e l'épaisseur de la lentille, au niveau de l'axe optique. On rappelle qu'on cherche à établir la relation de conjugaison d'une lentille ***mince***. Cela signifie que e est négligeable devant toute autre distance du problème.

20. Montrer que le terme γ peut s'écrire sous la forme :

$$\gamma = -n_2\frac{e}{\overline{S_1B}\times\overline{S_2B}}$$

On admet que le terme γ est négligeable devant les autres termes (On peut le deviner par le fait que e au numérateur est "très petit").

On nomme O le milieu de la lentille, c'est à dire le point O tel que :

$$\overline{S_1O} = \frac{e}{2}$$

21. Montrer que $\overline{S_1A_1} \approx \overline{OA_1}$ et $\overline{S_2A'_2} \approx \overline{OA'_2}$

$$\overline{S_1A_1} = \overline{S_1O} + \overline{OA_1} = \frac{e}{2} + \overline{OA_1} \approx \overline{OA_2}$$

22. Retrouver la relation de conjugaison d'une lentille mince, et déterminer l'expression de la focale d'une lentille mince dans ce modèle.

En négligeant γ, et en utilisant l'approximation tout juste énoncée, et en remarquant que A'_2 est l'image de A_1 à travers l'ensemble. La relation obtenue à la question 19 devient, en nommant $A_1 = A$ et $A'_2 = A'$

$$\left(\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}}\right) = \frac{\Delta n}{n_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

C'est bien la relation de conjugaison d'une lentille pour :

$$f' = \frac{n_1}{\Delta n}\frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}$$

23. Faire l'application numérique pour la focale d'une lentille de forme identique à celle présentée sur la figure 2, avec deux dioptres de même rayon de courbure 10 cm (en valeur absolue).

Sur ce schéma, $R_1 = +10$ *cm et* $R_2 = -10$ *cm, puisque le premier dioptre est tel que* $\overline{S_1C_1} > 0$ *et* $\overline{S_2C_2} < 0$.

En remplaçant dans la formule trouvée précédemment, et en prenant $n_1 = 1$, $n_2 = 1.5$, *on trouve donc une focale :*

$$f' = +10\ cm$$

Lentille convergente.

3 Application

La "formule des opticiens" est une formule mathématique utilisée par les fabriquants de lentilles pour déterminer la focale d'une lentille, en fonction des rayons de courbures algébriques des deux faces de cette lentille. Elle est donnée sous la forme :

$$\frac{1}{f'} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

où n est l'indice du verre utilisé pour fabriquer la lentille.

24. Justifier que cette formule est équivalente à la relation que vous avez obtenue à la question **??**.

Lorsque l'indice n_1 *est celui de l'air, alors* $n_1 \approx 1$ *ce qui explique pourquoi les opticiens utilisent cette formule.*

Voici le schéma en coupe d'une lentille.

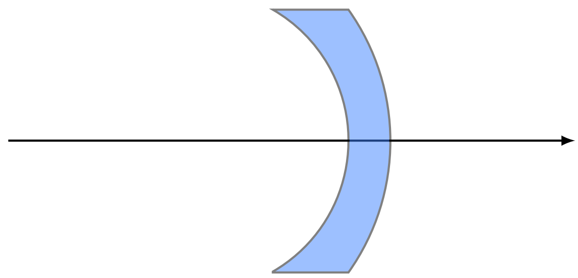

Figure 3 – Coupe d'une lentille

25. Utiliser la formule des opticiens pour déterminer (soigneusement) si cette lentille est convergente ou divergente.

Sur le schéma, on voit que : $|R_1| < |R_2|$. *On voit aussi qu'ils sont de même signe, négatifs. On a donc* $R_2 < R_1$

$$\begin{aligned} & R_2 < R_1 \\ \Longrightarrow\ & \frac{1}{R_2} > \frac{1}{R_1} \\ \Longrightarrow\ & \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} < 0 \end{aligned}$$

Cette lentille est donc de focale $f' < 0$, *il s'agit d'une lentille divergente.*

On retourne cette lentille.

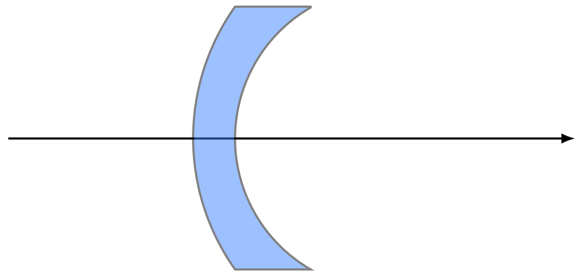

FIGURE 4 – La même lentille, retournée.

26. Montrer que la focale de cette lentille reste identique.

Soit on utilise un argument de symétrie + principe de retour inverse, mais c'est difficile de le formuler proprement.

Soit on remarque qu'en retournant la lentille, l'ordre des dioptres est inversé, et le signe des rayons de courbures est inversé. On peut donc dire que c'est une nouvelle lentille telle que $R_1' = -R_2$ et $R_2' = -R_1$ La focale de cette nouvelle lentille est : $f' = (n-1)\left(\frac{1}{R_1'} - \frac{1}{R_2'}\right)$ c'est à dire, après substitution, exactement la même que la précédente.

On suppose que cette lentille est utilisée dans les conditions de Gauss, centrée en O, l'origine de notre repère. On place un point objet lumineux A de couleur blanche à une distance $\delta = 0.53\ m$ à gauche de cette lentille. On note $\ell_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}$, et on suppose cette grandeur connue, et négative.

27. Déterminer la position x de l'image A' de ce point à travers la lentille, en fonction de ℓ_0, n et δ.

$$x = \frac{\delta \ell_0}{(n-1)\delta - \ell_0}$$

L'indice du verre utilisé pour fabriquer cette lentille dépend de la longueur d'onde λ selon la loi :

$$n(\lambda) = a + \frac{b}{\lambda^2}$$

Avec a et b connus et positifs.

28. Montrer qu'il y a "abhération chromatique" dans ce système optique, c'est à dire que le point A de couleur blanche donne lieu à une image A' différente pour chaque longueur d'onde.

Puisque x dépend de n, et que n dépend de λ, alors x dépend de λ.

29. Déterminer le sens de variation de la fonction $x(\lambda)$, en déduire l'ordre des couleurs de l'image.

On trouve le sens de variation de $\lambda \mapsto x(\lambda)$ en calculant la dérivée de cette fonction.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{2b\delta\ell_0}{\lambda^3\left((n-1)\delta - \ell_0\right)^2}$$

Le signe de cette fonction dépend du signe de ℓ_0. Pour une lentille divergente, comme celle mentionnée précédemment, $\ell_0 < 0$, et cette fonction est négative, quel que soit λ. Par conséquent, plus λ augmente, plus x est petit. Lorsque x est positif, ce qui est le cas pour une image réelle, on a donc les couleurs rouges (grand λ) plus proche de la lentille que les couleurs bleues (faible λ)

Pour une lentille convergente, c'est l'inverse.