DS Physique 2 : La fronde

EC : Mécanique

Calculatrice interdite, sans document, durée : 3h, Encadrez vos résultats. Toute valeur numérique donnée sans unité sera considérée comme erronée.

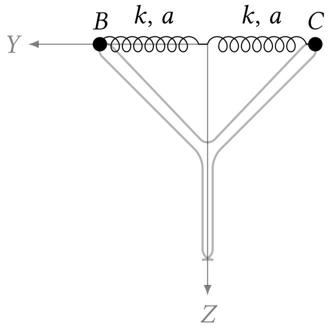
Exercice 1 – Lance pierre primitif (≈ 15 points)

On étudie un lance-pierre.

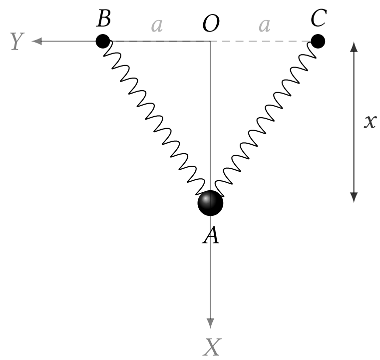
On modélise un lance-pierre par deux points fixes (l'extrémité des branches en bois) entre lesquels existe un élastique.

Pour des raisons de commodité, l'élastique sera considéré comme deux ressorts bout à bout de longueurs au repos égales ($\ell_0 = a$, connue) et de raideurs égales ($k = 100\ N/m$, connue).

Au repos, l'espace entre les branches vaut $2a$ avec $a = 4\ cm$. On place une masse (de taille nulle) en contact avec l'élastique au milieu des deux branches, puis on tire parallèlement à $\vec{u}_x$.
On cherche à déterminer la force à exercer en fonction de l'étirement horizontal x (voir dessin). Dans cet exercice, **on néglige les effets du poids**. On commence par considérer que l'étirement se fait uniquement dans le plan horizontal $(O, \vec{u_x}, \vec{u_y})$.



Vue de dessus



1. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CA}$ en fonction de x.

$$\overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix} x \\ -a \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{CA} = \begin{bmatrix} x \\ a \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. En déduire l'expression des vecteurs unitaires $\vec{u}_{BA}$ et $\vec{u}_{CA}$ (toujours en fonction de x).

$$\vec{u}_{BA} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \begin{bmatrix} x \\ -a \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{u}_{CA} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \begin{bmatrix} x \\ a \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Montrer que la force $\vec{T}$ à exercer pour maintenir le système à l'équilibre vaut :

$$\vec{T} = 2kx\left(1 - \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right)\vec{u}_x$$

$$\vec{F}_1 \stackrel{\text{def}}{=} -k(l - a)\vec{u}_{BA}$$

$$\vec{F}_1 = -k(\sqrt{x^2 + a^2} - a)\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \begin{bmatrix} x \\ a \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{F}_1 = -k\left(1 - \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right) \begin{bmatrix} x \\ a \\ 0 \end{bmatrix}$$

de même :

$$\vec{F}_2 = -k\left(1 - \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right) \begin{bmatrix} x \\ -a \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'équilibre impose que $\sum \vec{F} = \vec{0}$ soit :

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{T} = \vec{0}$$

4. Pour quel étirement x, n'a-t-on pas besoin d'exercer d'effort pour que le système soit à l'équilibre ?

On cherche x tel que $T = 0$. Cela arrive lorsque $x = 0$ (racine triple).

Pour améliorer ce modèle, on tient compte du fait que, lorsque le lance-pierre est fabriqué, l'élastique qui relie B à C n'est pas parfaitement ajusté. On traduit cette information par le fait que la longueur à vide des deux ressorts n'est pas tout à fait a, mais un peu plus grande que a. On note donc la nouvelle longueur à vide βa, avec $\beta = 1.1$.

5. Que devient l'expression de la force à exercer pour maintenir l'équilibre ?

À la place de $l_0 = a$, on prend $l_0 = \beta a$. La force à exercer devient alors :

$$\vec{T} = 2kx\left(1 - \frac{\beta a}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right)\vec{u}_x$$

6. Donner toutes les valeurs de x pour lesquelles on n'a pas besoin d'exercer d'effort pour que le système soit à l'équilibre ?

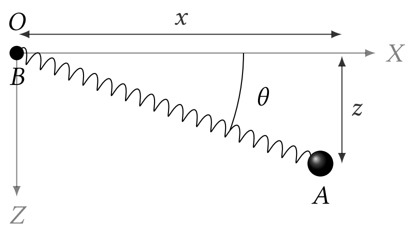
$x = 0$ reste une possibilité. Mais deux nouvelles possibilités apparaissent :

$$x = \pm a\sqrt{\beta^2 - 1}$$

solutions de $1 - \dfrac{\beta a}{\sqrt{a^2 + x^2}} = 0$

Ensuite, on tient compte du fait que l'on souhaite lancer la pierre vers le haut, en donnant un angle θ connu entre le plan horizontal et l'inclinaison des ressorts.

Vue de côté



7. Donner l'expression de la tension à exercer pour obtenir un équilibre, en fonction de x et z.

Avec la même méthode que précédemment, on obtient :

$$\vec{T} = 2k\left(1 - \frac{\beta a}{\sqrt{a^2 + x^2 + z^2}}\right)\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{bmatrix}$$

Enfin, on veut fournir une certaine énergie au projectile. Vous verrez plus tard que l'énergie potentielle emmagasinée par ce lance-pierre est dans le cas présent : $E = k(\ell - \ell_0)^2$ où ℓ est la longueur d'un des ressorts étirés et ℓ_0 la longueur à vide du ressort. On suppose cette énergie intégralement transmise au projectile lorsqu'on relâche la tension.

8. Si on souhaite que l'énergie emmagasinée soit $E_0 = 25\ J$ (le Joule est une unité du système international), quelle doit être la longueur ℓ_1 d'un ressort étiré ? Faire l'application numérique.

$$\ell_1 = \beta a + \sqrt{\frac{E_0}{k}} = 54.4\ cm$$

9. Exprimer z en fonction de x et θ. En déduire l'expression de x en fonction de ℓ_1, β, a et θ

$$z = x \tan\theta$$

$$\ell_1^2 = a^2 + x^2 + z^2$$

$$\Longrightarrow x^2(1+\tan\theta^2) = \ell_1^2 - a^2$$
$$\Longrightarrow \frac{x^2}{\cos^2\theta} = \ell_1^2 - a^2$$
$$\Longrightarrow x = \sqrt{\ell_1^2 - a^2}\cos\theta$$

10. Donner l'expression de la force à exercer pour donner au projectile une énergie E_0 avec un angle θ.

$$\vec{T} = 2k\left(1 - \frac{\beta a}{\sqrt{a^2+x^2+z^2}}\right)\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{bmatrix}$$
$$\Longrightarrow \vec{T} = 2kx\left(1 - \frac{\beta a}{\ell_1}\right)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \tan\theta \end{bmatrix}$$
$$\Longrightarrow \vec{T} = 2k\frac{x}{\ell_1}(\ell_1 - \beta a)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \tan\theta \end{bmatrix}$$
$$\Longrightarrow \vec{T} = 2k\frac{\sqrt{\ell_1^2 - a^2}}{\ell_1}\cos\theta(\ell_1 - \beta a)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \tan\theta \end{bmatrix}$$
$$\Longrightarrow \vec{T} = 2k\sqrt{1 - \frac{a^2}{\ell_1^2}}\left(\sqrt{\frac{E_0}{k}}\right)\begin{bmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

On peut remplacer ℓ_1 par son expression, mais rien de simple n'apparaît.

11. Montrer que puisque $a^2 \ll \ell_1^2$, cette expression se simplifie en : $\vec{T} \approx 2\sqrt{kE_0}\begin{bmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ \sin\theta \end{bmatrix}$

ici, on utilise le fait que $1 - a^2/\ell_1^2 \approx 1$.

$$\vec{T} \approx 2k\sqrt{\frac{E_0}{k}}\begin{bmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ \sin\theta \end{bmatrix} = 2\sqrt{kE_0}\begin{bmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

12. En déduire la norme de la force à exercer. Faire l'application numérique. Seriez-vous capable d'exercer cette force ?

$T = 100$ N soit une force correspondant au poids d'une masse de 10 kg. C'est dur, mais c'est faisable.

EXERCICE 2 – Bolas - (≈ 10 points)

Les bolas désignent une ancienne arme de jet qui était utilisée pour la chasse. On les faisait tournoyer au-dessus de la tête avant de les lâcher et de viser une cible, un peu comme avec une fronde. Nous allons modéliser cet instrument simplement par une seule masse (m) ponctuelle attachée à un fil rigide, inextensible, de longueur ℓ, en rotation dans un plan horizontal au-dessus de la tête du lanceur.
*Dans un premier temps, on ignore le poids. On considèrera que le lanceur impose, via la tension dans le fil une trajectoire **circulaire uniforme** de vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega_0$, positive, connue.*

1. Rappeler l'expression générale du vecteur position, vitesse et accélération en repérage cylindrique.

2. Que deviennent ces expressions dans ce cas particulier ?

cylindriques avec $z = 0$, $\rho = \ell$ et $\theta = \omega_0 t$

3. Appliquer le principe fondamental de la dynamique dans la base polaire pour en déduire la tension dans le fil, en fonction des données.

La seule force qui agit sur la masse est la tension du fil.

$$\vec{T} = m\vec{a} = -m\ell\omega_0^2\vec{u}_\rho$$

4. Quelle est la vitesse angulaire maximale que peut imposer le lanceur si le fil a une résistance maximale connue de T_{max} ?

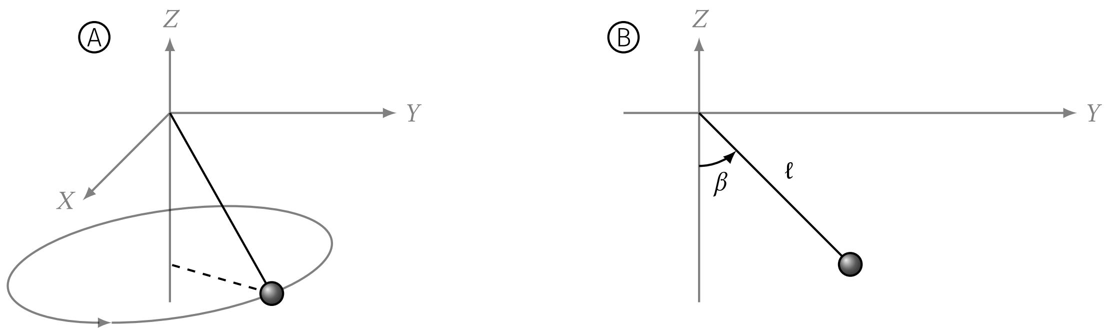
Pour un mouvement circulaire uniforme, $a = a_r = -r\dot{\theta}^2$ soit ici $a_r = -\ell\omega_0^2$ et la seule force qui agit sur la masse est la tension du fil, donc $T = m\ell\omega_0^2$ (projection du PFD sur $\vec{u}_r$). Par conséquent :

$$\boxed{\omega_0^{max} = \sqrt{\frac{T_{max}}{m\ell}}}$$

5. Faire l'application numérique avec : $\ell = 1\ m$, $\quad m = 0.5\ kg$, $\quad T_{max} = 1800\ N$. Donner aussi votre réponse en tours par seconde. Y a-t-il un risque de casse ?

$$\omega_0^{max} = \sqrt{3600} = 60\ rad.s^{-1} \approx 10\ tours/s$$

10 tours par secondes est une valeur difficile à atteindre pour une personne faisant tourner une masse de 500 g au bout d'un fil de 1 mètre de long, il n'y a pas grand risque...



On prend maintenant en compte le poids. Le mouvement reste circulaire uniforme d'axe de rotation (OZ), et de vitesse angulaire ω_0 connu, mais le poids de la masse fait apparaître un angle β **constant inconnu** entre le fil et la verticale.

6. Reproduire les dessins ci-dessus et y faire apparaître, à l'endroit de la masse, les trois vecteurs de la base cylindrique.

7. Que valent le ρ et le z des coordonnées cylindriques dans ce modèle (en fonction de β et ℓ) ?

Comme l'angle β est constant, cela signifie que l'altitude $z = -\ell\cos\beta$ est constant également. Donc $\ddot{z} = 0$. la distance ρ des coordonnées cylindriques vaut ici $\ell\sin\beta$.

8. Utiliser le principe fondamental de la dynamique pour déterminer la valeur de β en fonction des données de l'énoncé.

Les forces agissant sur la masse sont : le poids et la tension du fil. PFD :

$$m\begin{bmatrix} -\ell\sin\beta\omega_0^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} + T\begin{bmatrix} -\sin\beta \\ 0 \\ \cos\beta \end{bmatrix}$$

On en déduit que :

$$T\cos\beta = mg \qquad (1)$$

et

$$T = m\ell\omega_0^2 \qquad (2)$$

donc

$$\boxed{\beta = arcos\left(\frac{g}{\ell\omega_0^2}\right)}$$

9. Montrer que ce mouvement n'est possible qu'à partir d'une certaine valeur de ω_0.

$$\cos\beta \leq 1 \Rightarrow \frac{g}{\ell\omega_0^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{g}{\ell} \leq \omega_0^2$$

Pour que le mouvement soit possible, il faut que :

$$\boxed{\sqrt{\frac{g}{\ell}} \leq \omega_0}$$

Le lanceur lâche soudainement le fil, au moment où la masse est sur l'axe (OX) (toujours sans vitesse verticale).

10. Que vaut l'expression de la vitesse $\vec{v}_0$ au moment où le fil est lâché ?

Le mouvement est toujours tangent au cercle, donc en quand la masse est sur l'axe (OX) la vitesse est selon (OY).

$$\vec{v}_0 = \ell\sin(\beta)\omega_0\vec{u}_y$$

Avec β la valeur obtenue précédemment.

Dans la suite du mouvement, on oublie le fil, on ne considère que la masse en mouvement dans l'air. La masse est initialement à une hauteur h au dessus du sol. On suppose que la vitesse initiale v_0 vaut $18\ m.s^{-1}$. On néglige tout frottement.

11. À quelle distance horizontale du lanceur la masse touche-t-elle le sol ?

Chute libre avec $z(0) = h$ et $\vec{v_0} = v_0\vec{u_x}$. On détermine x et z en fonction du temps, on détermine le temps nécessaire pour que $z = 0$ et on remplace la valeur de temps trouvée dans l'expression de $x(t)$.