DS Physique 3

EC : Mécanique

Durée : 2h30. Aucun document autorisé. Calculatrice interdite. Encadrer les résultats. Utilisez des expressions littérales, sauf si on vous demande explicitement une valeur numérique.

1 Oscillateur harmonique amorti

On considère le système suivant : une masse m peut glisser sans frottement sur un plan incliné. Le plan forme un angle α (fixe) avec l'horizontale. Cette masse est reliée à un ressort fixé à l'origine O. Elle ne peut se déplacer que dans la direction $\pm\vec{u_x}$. On note x la position de cette masse. Le ressort est de raideur k et de longueur au repos ℓ_0. On considère une force de frottement fluide de coefficient de frottement λ : $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$. Attention : α est l'angle, et λ est le coefficient de frottement, ne pas confondre les deux.

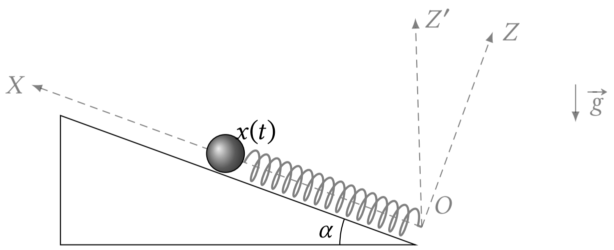

Figure 1 – figure illustrative

1. Établir une équation différentielle sur x.

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = -g\sin(\alpha)$$

2. La mettre sous la forme suivante (en précisant les expressions de β, ω_0 et ℓ_1) :

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2\ell_1$$

$$\beta = \frac{\lambda}{2m}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\ell_1 = \ell_0 - \frac{mg\sin(\alpha)}{k}$$

3. Proposer une interprétation pour la signification de ℓ_1 dans ce problème.

ℓ_1 est la position d'équilibre de la masse.

4. Pour quel domaine de valeur de λ est-ce que ce système est amorti faiblement ?

$\lambda < 2\sqrt{mk}$

Dans les questions suivantes, vous pouvez utiliser β, ω_0 et ℓ_1 pour vos réponses.

On suppose la condition ci-dessus réalisée. On suppose qu'à l'instant initial, la masse est lâchée en $x(0) = \ell_1 + \delta_0$, avec $\delta_0 > 0$, une longueur connue. Sa vitesse initiale est nulle.

5. En déduire l'expression de $x(t)$.

$$x(t) = \ell_1 + e^{-\beta t}\delta_0(\cos(\omega_0' t) + \frac{\beta}{\omega_0'}\sin(\omega_0' t))$$

On suppose, qui plus est, que $\beta \ll \omega_0$. Montrer que l'expression de $x(t)$ se simplifie en :

$$x(t) = \ell_1 + \delta_0 e^{-\beta t}\cos(\omega_0 t)$$

6. Au bout de combien de temps t_{10} est-ce que l'amplitude des oscillations ne vaut plus que $\frac{1}{10}$ de sa valeur initiale ?

   $t_{10} = \frac{1}{\beta}\ln(10)$

7. Déterminer N, le nombre approximatif d'oscillations que la masse a pu effectuer entre temps ?

   $N = \frac{t_{10}}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi\beta}\ln(10) \approx 40$

On donne : $m = 0.1$ kg, $k = 10$ N m^{-1}, $\ell_0 = 1$ m, $\lambda = 0.02$ kg m^{-1}, $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\delta_0 = 0.5$ m. On donne aussi : $\ln(10) \approx 2.5$ et $\pi \approx 3$.

8. Donner les valeurs numériques de ω_0, β, ℓ_1, t_3 et N

9. Tracer très soigneusement l'allure de la fonction $x(t)$. Faire un tracé entre $t = 0$ et $t = 2t_{10}$.

   Pour info, le 2 est une typo dans la question. Cela ne change pas grand chose, si ce n'est que le dessin est bien tassé.

2 Frottement solide

Nous avons tenu compte d'un frottement fluide. Que se passerait-il si on prenait en compte un frottement solide plutôt ?

On reprend l'étude depuis le début, en oubliant le frottement fluide, mais en rajoutant un frottement solide de coefficient $f = 0.5$. Les valeurs numériques sont identiques à la partie précédente, sauf λ qui est nul.

10. Utilisez votre intuition pour tracer l'allure de la trajectoire du mobile $(x(t))$ dans le cas d'un frottement solide. Cette question ne rapporte pas de points.

    Moi, mon intuition me dit que ça va faire un peu comme avec un frottement fluide, elle ne me dit pas grand chose de plus.

On rappelle les lois du frottement solide : si le mobile glisse, alors $R_\parallel = fR_n$ et le mobile ne peut être statique que si $R_\parallel < fR_n$.

Comme dans l'étude précédente, on part d'une situation initiale où le mobile a une vitesse nulle et est placé en $x(0) = \ell_1 + \delta_0$ avec $\delta_0 > 0$.

11. Montrer que, que le mobile soit en mouvement, ou bien qu'il soit statique, dans tous les cas, la réaction normale du support reste la même.

    Puisque $\ddot{z} = 0$, en mouvement ou bien fixe, la projection du PFD sur $\vec{u_z}$ est dans tous les cas : $R_n = mg\cos(\alpha)$

12. Montrer que, pour que le mobile reste statique après l'instant initial, il faut que $\delta_0 < a$, avec $a = \frac{fmg\cos\alpha}{k}$

    Il y a équilibre statique en $x(0)$ si :

    $$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

    Ce qui, projeté sur $\vec{u_x}$ donne :

    $$R_\parallel - k(x(0) - \ell_0) - mg\sin\alpha = 0$$

    Soit, après substitution :

    $$R_\parallel = k\delta_0$$

    La condition de non glissement donne :

    $$k\delta_0 < fmg\cos\alpha$$

On suppose que cette condition n'est pas réalisée, c'est à dire $\delta_0 > a$. Le mobile se met donc en mouvement.

13. Montrer que, selon le sens de déplacement du mobile, x ne vérifie pas la même équation différentielle.

    Selon le sens de déplacement du mobile, la force de frottement solide change d'orientation (cf plus bas).

On étudie la première phase de son mouvement lorsque $\dot{x} < 0$.

14. On pose $X \stackrel{\text{def}}{=} x - \ell_1$. Montrer que :

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 a$$

La projection du PFD sur $\vec{u_x}$ donne :

$$m\ddot{x} = -k(x - \ell_0) - mg\sin\alpha + fmg\cos\alpha$$

Et si on remplace x par $X + \ell_1$, et $\ddot{x}$ par $\ddot{X}$, on trouve l'équation donnée. Notons que $\ddot{x} = \ddot{X}$ car ℓ_1 est une constante.

15. En déduire l'expression de $X(t)$, lors de cette phase du mouvement.

$$X(t) = a + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

avec pour CI $x(0) = \ell_1 + \delta_0 \implies X(0) = \delta_0$ et $\dot{X}(0) = 0$. On trouve :

$$X(t) = (\delta_0 - a)\cos(\omega_0 t) + a$$

16. Déterminer l'instant t_1, correspondant à la fin de cette phase, c'est à dire lorsque $\dot{x}$ s'annule.

$$\dot{X}(t) = -(\delta_0 - a)\omega_0 \sin(\omega_0 t)$$
$$\dot{X}(t_1) = 0 \implies \sin(\omega_0 t_1) = 0 \implies t_1 = \frac{\pi}{\omega_0}$$

17. Montrer que X_1, la position du mobile à cet instant vaut : $X_1 = -(\delta_0 - 2a)$

$$X_1 = X(t_1) = (\delta_0 - a)\cos(\omega_0 t_1) + a$$

On vient de déterminer la trajectoire dans une première phase du mouvement, valide entre l'instant initial et l'instant t_1. À l'instant t_1, deux choses peuvent se passer : soit le mobile repart dans l'autre sens ($\dot{x} > 0$), soit le frottement solide est suffisant pour le stopper définitivement. On suppose que le mobile repart dans l'autre sens. Pour l'étude de cette nouvelle phase, on choisit pour origine des temps le moment correspondant à t_1 dans la phase précédente, on a donc, à $t = 0$, $X(0) = X_1$ et $\dot{X}(0) = 0$.

18. Montrer que, lors de cette deuxième phase :

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = -\omega_0^2 a$$

La projection du PFD sur $\vec{u_x}$ donne :

$$m\ddot{x} = -k(x - \ell_0) - mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha$$

La seule chose qui change, c'est le sens de la force de frottement. On obtient donc l'équation donnée.

19. En déduire l'expression de $X(t)$, lors de cette phase du mouvement. En déduire X_2 la position du mobile à la fin de cette phase.

La solution générale est presque la même, mais avec des CI différentes.

$$X(t) = -a + A'\cos(\omega_0 t) + B'\sin(\omega_0 t)$$

Avec pour CI : $X(0) = X_1 = -(\delta_0 - 2a)$ et $\dot{X}(0) = 0$. On trouve donc :

$$X(t) = -(\delta_0 - 3a)\cos(\omega_0 t) - a$$

X_2 est atteint quand $\cos(\omega_0 t) = -1$, c'est à dire :

$$X_2 = +(\delta_0 - 3a) - a = \delta_0 - 4a$$

20. En déduire qu'après n phases de mouvement, la position du mobile est : $X_n = (-1)^n(\delta_0 - n \times 2a)$

On peut le montrer par récurrence. Soit n le nombre de phase déjà écoulée.

Si n est pair, alors l'équation différentielle qui pilote le mouvement est :

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 a$$

Car si n est pair, alors $\dot{x} < 0$. Sinon, l'équation différentielle qui pilote le mouvement est :

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = -\omega_0^2 a$$

C'est à dire que si $\forall n$:

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = (-1)^(n)\omega_0^2 a$$

De solution :

$$X(t) = (-1)^n a + A\cos + B\sin$$

Si on suppose que les conditions initiales sont $X(0) = X_0 = (-1)^n(\delta_0 - n \times 2a)$ et $\dot{X}(0) = 0$, alors on trouve :

$$X(t) = (-1)^n a + A\cos + B\sin$$

Alors $A = (-1)^n(\delta_0 - n \times 2a - a)$ La vitesse s'annule pour la première fois quand $\cos = -1$, c'est à dire en : $X_{n+1} = (-1)^{n+1}(\delta_0 - (n+1) \times 2a)$ On vient donc de montrer que si $X_n = -(1)^n(\delta_0 - n \times 2a)$, alors $X_{n+1} = \ldots$; la relation de récurrence est vérifiée. La relation est vraie également pour X_0, elle est donc vraie pour tout n.

21. Montrer que la durée τ d'une phase de mouvement est : $\tau = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Dans un graphique (t, X), positionner les points correspondant aux positions X_n.

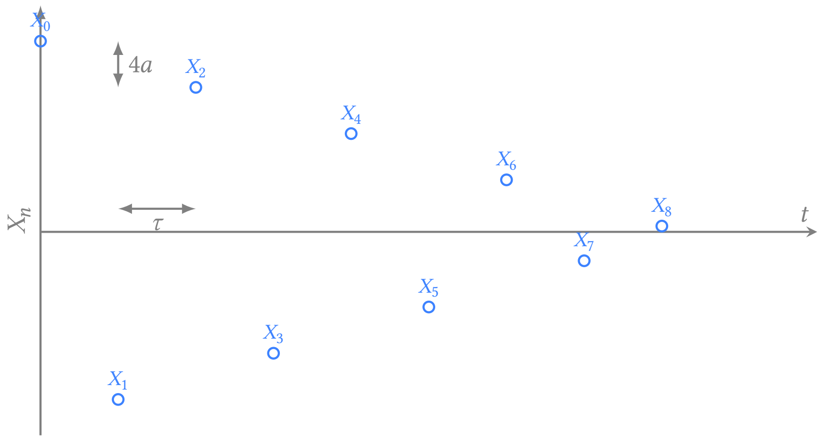

FIGURE 2 – figure demandée

22. Montrer que le mobile s'arrête à la phase n si : $|X_n| < a$

Le mobile s'arrête si l'équilibre statique est possible, soit si $X_n < a$ quand n est pair (déjà montré plus haut). Dans le cas où n est impair, la seule chose qui change est l'orientation de la force de frottement, mais la condition reste la même : X_n doit être plus petit que a en valeur absolue.

23. On libère le mobile en $x(0) = \ell_1 + 16.5a$, c'est à dire avec $X(0) = 16.5a$. Tracer très soigneusement l'évolution de X en fonction du temps.

24. Indiquez sur votre graphique "la zone d'arrêt complet du mobile".

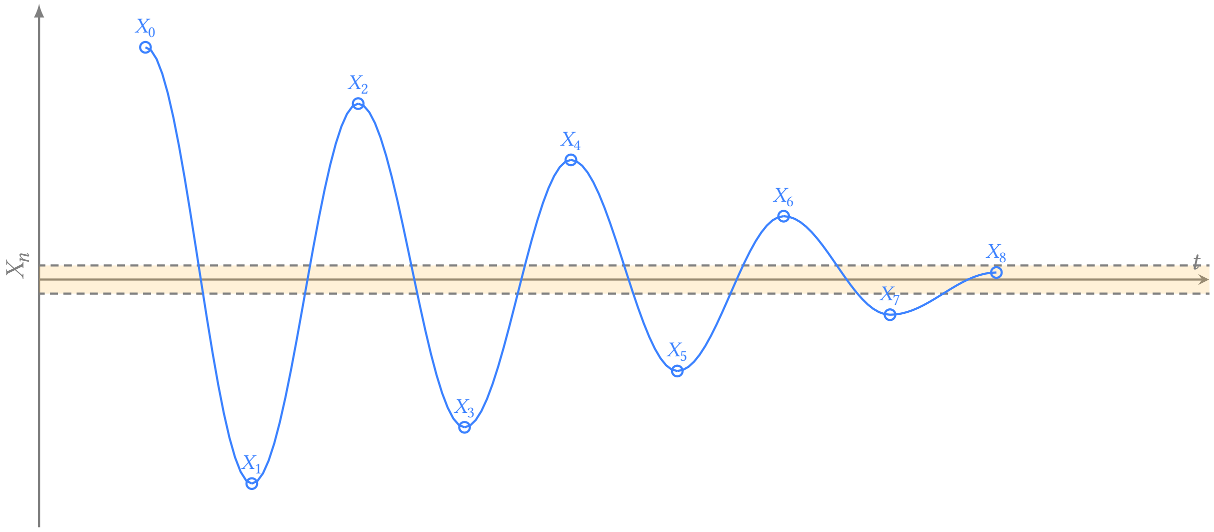

FIGURE 3 – figure demandée avec zone d'arrêt en jaune : si le mobile s'arrête dans cette zone, alors il ne repart pas. Ca ressemble beaucoup à un frottement fluide, sauf que l'enveloppe est linéaire et pas exponentielle. Le frottement solide permet l'arrêt complêt du mobile, contrairement au frottement fluide.