DS PHYSIQUE 4

EC : Mécanique

Durée : 2h30. Aucun document autorisé. Calculatrice interdite. Encadrer les résultats. Utilisez des expressions littérales, sauf si on vous demande explicitement une valeur numérique.

EXERCICE 1 – Questions de cours

Définitions :

1. Rappeler l'expression de l'énergie potentielle élastique, en précisant la signification des symboles que vous utilisez.

2. Rappeler la définition du moment d'une force $\vec{T}$ quelconque, s'exerçant sur un point matériel situé en P, par rapport au point G.

3. Rappeler la définition du moment cinétique $\vec{L}_G$ d'un point matériel de masse m, situé en P, se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$, par rapport à un point G.

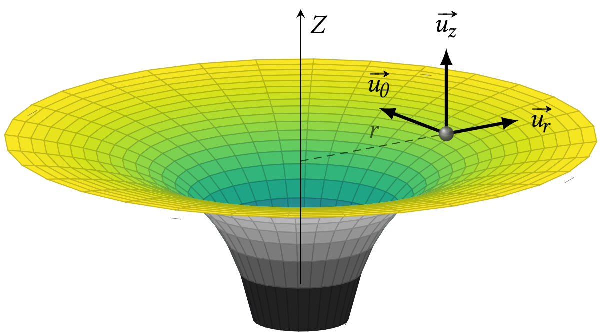
Un électron de charge $-e$ et de masse m se déplace dans une zone de l'espace soumis à un champ électromagnétique uniforme, où $\vec{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}(-\vec{u_y} + \vec{u_z})$ et $\vec{B} = \frac{B_0}{\sqrt{2}}(\vec{u_y} + \vec{u_z})$. À l'instant initial, l'électron se déplace à la vitesse $\vec{v}(0) = v_0\vec{u_x}$, et il se trouve en $\vec{r}(0) = \frac{r_0}{\sqrt{3}}(\vec{u_x} + \vec{u_y} + \vec{u_z})$. Les constantes m, r_0, E_0, B_0, v_0 et e sont positives et connues.

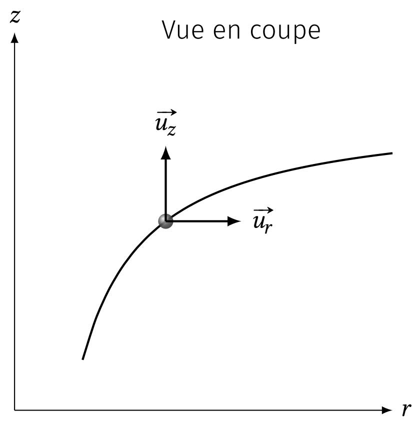
4. Exprimer le moment cinétique de l'électron à l'instant initial.

5. Exprimer la force électromagnétique totale qui s'exerce sur l'électron à $t = 0$.

EXERCICE 2 – Problème : plan hyperbolique

Si vous allez à la cité des sciences de la Villette, vous trouverez une expérience d'illustration du mouvement orbital qui s'appelle un orbitogramme. Il s'agit d'une surface au milieu de laquelle se trouve un creux, et sur laquelle vous pouvez lancer une bille en métal, la forme de la surface est telle que les trajectoires suivies par la bille sont similaires à celles d'une planète autour du Soleil. En tout cas, c'est ce que le conservateur du musée vous affirme. Le but de ce problème est de vérifier ses dires.





Une bille considérée comme une masse ponctuelle de masse m connue roule **sans frottement** sur un plan "hyperbolique" dont l'altitude z vérifie, en coordonnées cylindriques :

$$z_{plan}(r) = -\frac{A}{r} \qquad \text{avec } A = 0.1\ m^2 \text{ une constante connue}$$

La position de la bille est repérée par le point matériel $M(r, \theta, z)$. La dénomination "plan hyperbolique" est imagée, ce n'est pas un plan plat comme d'habitude, c'est une surface courbe.

Vous supposerez que la bille reste toujours en contact avec le plan, et qu'elle subit l'action de son poids $\vec{P}$, et de la réaction du plan $\vec{R} = R_r\vec{u}_r + R_\theta\vec{u}_\theta + R_z\vec{u}_z$ et pas d'autres forces. La constante g vaut 10 m/s^2.

1. Justifiez sans calcul que $R_\theta = 0$.

   La réaction est normale au plan, or, $\vec{u}_\theta$ est inclus dans le plan de la trajectoire. $\vec{u}_\theta$ est donc aussi inclus dans le plan tangent à la surface hyperbolique. La réaction n'a donc pas de composante selon $\vec{u}_\theta$.

2. En appliquant le PFD, montrer que la quantité $C \stackrel{\text{def}}{=} r^2\dot{\theta}$ est constante.

$$\begin{aligned}
& \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a} \\
& \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_r \\ 0 \\ R_z \end{bmatrix}_{cyl.} = m \begin{bmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \\ \ddot{z} \end{bmatrix}_{cyl.} \\
\implies \quad & 0 = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \\
\implies \quad & 0 = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) \quad \forall r \neq 0 \\
\implies \quad & r^2\dot{\theta} = cste
\end{aligned}$$

3. On lâche la bille avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \begin{bmatrix} 0.1 \\ 1 \\ 0.01 \end{bmatrix}_{cyl.}$ en $r_0 = 1$ m, avec $v_0 = 1\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$. Quelle est la valeur numérique de la constante C? **Ne remplacez pas C par sa valeur numérique dans la suite du problème, sauf lorsqu'on vous demande une valeur numérique.**

   $C = 0.5 \times 2 = 1m^2.s^{-1}$

4. Exprimer l'énergie cinétique de la bille en fonction de r,$\dot{r}$, et C .

   Puisque $z = -A/r$, $\dot{z} = A\dot{r}/r^2$

$$\begin{aligned}
E_c &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}mv^2 \\
E_c &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2) \\
E_c &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \frac{A^2\dot{r}^2}{r^4}) \\
E_c &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2} + \frac{A^2\dot{r}^2}{r^4}) \\
E_c &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2(1 + \frac{A^2}{r^4}) + \frac{mC^2}{2r^2}
\end{aligned}$$

5. Montrer que l'énergie mécanique de la bille peut s'écrire :

$$E_m = \frac{1}{2}m\alpha\dot{r}^2 + E_{p-eff}(r) \text{ avec } \alpha = 1 + \frac{A^2}{r^4} \text{ et } E_{p-eff}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{mgA}{r}$$

$$\begin{aligned}
E_m &= E_c + E_p \\
&= \frac{1}{2}m\dot{r}^2(1 + \frac{A^2}{r^4}) + \frac{mC^2}{2r^2} + mgz \\
&= \frac{1}{2}m\dot{r}^2(1 + \frac{A^2}{r^4}) + \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{mgA}{r}
\end{aligned}$$

6. Tracer l'allure de E_{p-eff}.

   Si $r \to 0$ alors $E_{p-eff} \to +\infty$.

   Si $r \to \infty$ alors $E_{p-eff} \to O^-$.

7. Déterminer le domaine des valeurs possibles de r selon les valeurs de l'énergie mécanique initiale.

Puisque $\frac{1}{2}m\alpha\dot{r}^2 > 0 \forall r$, $E_{p-eff} < E_m$.

Donc selon les valeurs de E_m *initiale, qui se conserve,* $r \in [r_{min}, \infty[$, *ou bien* $r \in [r_{min}, r_{max}]$ *ou bien* $r = r_c$ *(cf cours)*

8. À quelle condition sur E_{p-eff} le mouvement est-il circulaire ? Montrer que la valeur r_c du rayon de la trajectoire circulaire vaut alors : $r_c = \frac{C^2}{gA}$

La trajectoire est circulaire lorsque $\frac{dE_p}{dr} = 0$, *c'est à dire lorsque :*

$$-\frac{mC^2}{r_c^3} + \frac{mgA}{r_c^2} = 0$$

$$r_c = \frac{C^2}{gA}$$

9. Préciser la valeur numérique de α dans le cas de cette trajectoire.

$$\alpha = 1 + \frac{A^2}{r_c^4} = 1 + \frac{0.1^2}{(1)^4} = 1.01$$

10. Quelle est l'expression de la vitesse angulaire dans le cas du mouvement circulaire de rayon r_c ? Donner votre réponse en fonction de C, g et A Quelle est l'expression de la période de révolution ?

$$\dot{\theta} = \frac{C}{r_c^2}$$
$$\dot{\theta} = \frac{C(gA)^2}{C^4}$$
$$\dot{\theta} = \frac{(gA)^2}{C^3} \quad et \quad T_{rev} = \frac{2\pi C^3}{(gA)^2}$$

Alors que la bille est en rotation circulaire uniforme de rayon r_c, on lui donne une pichenette dans la direction $\vec{u}_r$. Le rayon de la trajectoire va donc très légèrement varier par rapport à sa position d'équilibre r_c, mais la bille va revenir vers son rayon d'équilibre et osciller autour. On admet que tout se passe comme si le mouvement était purement radial. Au voisinage de r_c, l'énergie potentielle efficace peut s'écrire sous la forme :

$$E_{p-eff}(r) \approx \frac{1}{2}k(r - r_c)^2 + \text{cste}$$

11. Déterminer l'expression de k ?

La raideur du ressort équivalent s'obtient via la dérivée seconde de l'énergie potentielle par rapport à r, à l'équilibre.

$$\frac{d^2E_{p-eff}}{dr^2} = \frac{3mC^2}{r^4} - \frac{2mgA}{r^3}$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{d^2E_{p-eff}}{dr^2}(r_c) = \frac{3mC^2(gA)^4}{C^8} - \frac{2m(gA)^4}{C^6}$$
$$k = \frac{m(gA)^4}{C^6}$$

C'est la raideur du ressort équivalent.

On admet que dans le cadre de l'approximation faite sur l'énergie potentielle, α est constant au cours du temps.

12. En tenant compte de l'approximation de la question précédente, et en utilisant la conservation de l'énergie mécanique, montrer que $r(t)$ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{r} + \omega_0^2 r = \omega_0^2 r_c \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\frac{(gA)^2}{C^3}$$

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0 \implies \dot{r}(\alpha m\ddot{r} + kr = kr_c)$$

On modélise la pichenette par la condition initiale suivante : à $t = 0$, $r(0) = r_c$ et $\dot{r}(0) = v_1$, vitesse connue, faible, c'est à dire négligeable devant une grandeur pour le moment inconnue.

13. En déduire l'expression de $r(t)$.

$$r(t) = r_c + \frac{v_1}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$$

14. En déduire la période des petites oscillations autour de ce rayon d'équilibre. Comparer cette valeur à la période de révolution de la bille autour de l'orbitogramme. Pour quelle valeur de α est-ce que ces deux valeurs coïncident ?

La période des petites oscillations vaut : soit

$$T_{oscil} = \sqrt{\alpha}\frac{2\pi C^3}{(gA)^2}$$

Autrement dit, les oscillations du rayon ont presque la même période que la révolution de la bille autour de l'orbitogramme. La trajectoire est donc un truc qui ressemble à une ellipse.

15. Tracer $r(t)$ et sur un même graphique, tracer $\theta(t)$. En déduire l'allure de la trajectoire de la bille, vue du dessus.

Une trajectoire elliptique peut s'écrire en coordonnées polaires sous la forme $r(\theta) = \dfrac{p}{1 - e\sin\theta}$. Et, pour les faibles valeurs de e, c'est à dire lorsque $e < 0.1$, cette expression devient : $r(\theta) \approx p(1 + e\sin(\theta))$

16. En déduire que la projection de la trajectoire sur OXY est une ellipse et donner la valeur de l'excentricité e de l'ellipse formée par la trajectoire de la bille. Que doit vérifier v_1 pour que toutes ces approximations soient correctes ?

$$e = \frac{v_1}{r_c\omega_0}$$

Puisque $e < 0.1$ pour avoir le droit de dire ça, il faut que $v_1 \ll r_c\omega_0$.

On vient de montrer que, comme pour le mouvement des planètes, l'énergie mécanique peut se décomposer en une énergie cinétique radiale et une énergie potentielle "efficace" qui a la même forme mathématique que pour les mouvements des planètes. Toutefois, contrairement aux planètes, il apparait une coefficient α qui dépend du rayon (masse apparente αm). Nous avons également montré que a proximité d'une trajectoire circulaire, la trajectoire devient elliptique, comme pour les planètes. Il faudrait maintenant montrer que cela reste vrai pour une trajectoire quelconque.