DS Physique 6

EC : Ondes

Durée : 2h00. Aucun document autorisé. Calculatrice interdite. Encadrer les résultats. Utilisez des expressions littérales, sauf si on vous demande explicitement une valeur numérique. *Sugg.▷ Exo 2 à revoir*

Exercice 1 – Questions de cours

Pour les questions qui viennent, vous préciserez la signification des symboles que vous utilisez.

1. Donner la définition du moment d'inertie d'un point matériel M par rapport à un axe.
2. Quelle loi permet de prédire le mouvement du centre de masse d'un solide ?
3. Quelle loi permet de prédire la rotation d'un solide autour d'un axe ?

Exercice 2 – Corde de Piano

Une corde de piano de masse linéique μ est tendue avec une tension T. Au repos la corde est rectiligne et parallèle à (Ox). On étudie les mouvements de la corde autour de la position d'équilibre. On note $y(x,t)$ le déplacement de la corde par rapport à la position d'équilibre. On admet que le principe fondamental de la dynamique impose la relation :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{T}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

1. Donner l'expression d'une onde de y se propageant dans le sens des x positifs, de vecteur d'onde k, de pulsation ω, d'amplitude y_0 et qui sert de référence pour les phases. Donner une expression complexe ainsi que la version réelle associée (partie réelle). Faire de même pour une onde de y qui se propage dans le sens des x négatifs, mais qui possède un déphasage à l'origine ϕ.

$$y_+(x,t) = y_0 \cos(\omega t - kx)$$
$$y_-(x,t) = y_0 \cos(\omega + kx + \phi)$$

2. Montrer que la superposition de ces deux ondes est :

$$y(x,t) = 2y_0 \cos(\omega t + \frac{\phi}{2}) \cos(kx - \frac{\phi}{2})$$

Soit par formules trigo, soit en développant avec euler.

$$y(x,t) = 2y_0 \cos(\omega t + \frac{\phi}{2}) \cos(kx + \frac{\phi}{2})$$

3. Comment appelle-t-on ce type de déplacement ?

On appelle cela un mode stationnaire. Ici c'est en plus un mode propre, car la dépendance temporelle est sinusoïdale. Note : pour que ce mode soit vraiment un mode propre, il faut en plus que ce soit un mode autorisé par le système physique. Comme on n'a pas encore pris en compte les conditions aux limites, ce n'est pas stricto sensu un mode propre. Mais avec les définitions de cours, s'en est un.

Dans la suite, on manipulera uniquement des expressions réelles.

4. À quelle condition sur ω et k une onde (réelle) de y est elle possible dans une corde de piano ?

Attention : onde veut dire $y(x,t) = \underline{y}_0 e^{i(\omega t - kx)}$ ou bien $\cos(\omega t - kx)$. Si on insère cette onde dans la relation donnée, cela impose :

$$\omega^2 = k^2 \frac{T}{\mu}$$

La corde de piano est attachée en $x = 0$ et en $x = L$.

5. En déduire les fréquences temporelles possibles pour une corde.

La condition en $x = 0$ impose :

$$\forall t, 0 = 2y_0 \cos(\omega t + \frac{\phi}{2}) \cos(\frac{\phi}{2})$$

Soit en particulier à $t = 0$:

$$\cos^2 \frac{\phi}{2} = 0 \implies \phi = \pi[2\pi]$$

On en déduit :

$$\cos(kx - \frac{\phi}{2}) = \sin(kx)$$

Ensuite, on tient compte de la condition aux limites en $x = L$:

$$\forall t, \qquad \sin(kL) = 0$$

Soit :

$$kL = n\pi$$

Les seules fréquences possibles sont donc :

$$f_n = \frac{nc}{2L}$$

Dans un piano usuel, la fréquence fondamentale du son le plus grave (La0) et celle du son plus aigu (Do8) sont : $f_{\text{La0}} = 28\,\text{Hz}$ et $f_{\text{Do8}} = 4.2\,\text{kHz}$.

6. En déduire l'encombrement (la taille) minimal d'un piano usuel. Faire l'application numérique (en ordre de grandeur) si :

$$T \approx 1 \times 10^3\,\text{N}, \qquad \mu \approx 0.1\,\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}$$

NB : Dans l'énoncé originale, on donnait la masse volumique et pas la masse linéique. La fréquence fondamentale d'une corde sera donnée par la première des fréquences autorisées par la corde, soit celle pour $n = 1$. On en déduit la longueur des cordes nécessaires :

$$L_{La0} = \frac{c}{2f_{La0}} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}\frac{1}{2f_{La0}}$$

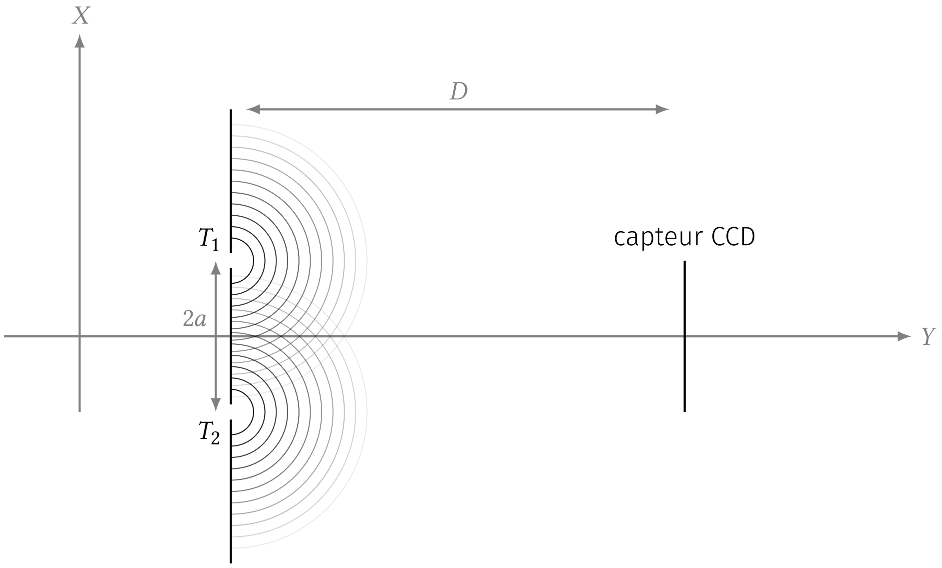
AN :

$$L_{La0} \approx 1\,\text{m}$$
$$L_{Do8} \approx 1\,\text{cm}$$

Exercice 3 – Trous d'Young

On considère deux trous T_1 et T_2 séparés d'une distance $2a$. Ces deux trous sont éclairés par une lumière monochromatique de longueur d'onde λ. On a placé à une distance D un capteur de lumière. On observe des interférences lumineuses sur le capteur. Le capteur est un capteur «CCD» de longueur L constitué de N photodiodes, chacune de largeur ℓ, qui sont des dispositifs qui délivrent une tension proportionnelle à l'intensité lumineuse qui les éclaire. On nomme M un point quelconque du capteur, de coordonnées (x, D). On suppose que T_1 émet une onde de champ électrique d'amplitude complexe : $E_1(M,t) = E_0 e^{i(\omega t - kr_1)}$. De même pour T_2 qui émet une onde de champ électrique : $E_2(M,t) = E_0 e^{i(\omega t - kr_2)}$, où r_1 est la distance T_1M et r_2 est la distance T_2M. Le milieu de propagation est de l'air. On rappelle la définition de l'indice optique : $n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c}{v_\phi}$. On nomme n_0 l'indice de l'air.

Données : $\lambda \approx 500\,\text{nm}$, $a = 0.1\,\text{mm}$, $D = 1\,\text{m}$, $n_0 = 1.003$, $N = 1024$, $L = 4\,\text{cm}$, $E_0 = 10\,\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$



1. Expliquer sans calcul pourquoi on observe un maximum d'intensité lumineuse au centre du capteur.

   Interférences constructives car même distance donc même phase pour les deux ondes.

2. Rappeler la définition de la vitesse de phase d'une onde de pulsation ω et de vecteur d'onde k. Rappeler le lien entre vecteur d'onde et longueur d'onde. En déduire l'expression de ω, en fonction des données.
   $\omega = \dfrac{2\pi c}{n_0\lambda}$

3. En déduire la fréquence temporelle d'oscillation du champ électrique. Faire l'application numérique.

On note $\phi_1 \stackrel{\text{def}}{=} kr_1$ et $\phi_2 \stackrel{\text{def}}{=} kr_2$. On note ϕ_m la moyenne de ϕ_1 et ϕ_2, et $\Delta\phi \stackrel{\text{def}}{=} \phi_1 - \phi_2$.

4. Exprimer le champ électrique total en M, en fonction de ϕ_m et $\Delta\phi$ et des données. Vous donnerez une expression complexe, puis la version réelle associée.

   $E(M,t) = 2E_0 e^{i\omega t} e^{i\phi_m} \cos(\dfrac{\Delta\phi}{2})$

5. Utiliser l'expression réelle du champ total en M pour montrer que l'intensité lumineuse en M est :

$$I(M,t) = I_0(M)\cos^2(\omega t + \phi_m(M))$$

   avec $I(M) = I_0(1 + \cos\Delta\phi)$ et vous préciserez l'expression de I_0.

6. Donner l'expression de la valeur moyenne (temporelle) de $I(M,t)$.

   La moyenne temporelle d'un cosinus au carré est $\frac{1}{2}$. Preuve attendue.

$$I_{moyen}(M,t) = \frac{I(M)}{2}$$

7. Déterminer les composantes fréquentielles (temporelles) de I et tracer le spectre de I.

$$I(M,t) = \frac{I_0(M)}{2}(1 + \cos(2\omega t))$$

   Ce signal possède donc trois composantes fréquentielles. Une de fréquence nulle et d'amplitude $I_0(M)/2$ et deux composantes symétriques (une à 2ω et une à -2ω d'amplitude $I_0(M)/4$.

Une photodiode ne répond pas instantanément aux changements d'intensité lumineuse. On peut considérer qu'une photodiode réelle est une photodiode idéale qui répond instantanément, suivie d'un filtre passe-bas de fréquence de coupure $f_c \approx 10\,\text{GHz}$

8. Justifier qu'il n'est pas possible de voir les oscillations temporelles du champ électrique via ces photodiodes. Pour quelles valeurs de longueur d'ondes est-ce que cela deviendrait possible ?

   La fréquence de coupure du filtre passe-bas est bien trop basse pour laisser passer les composantes supérieures à f_c. Or la fréquence temporelle des oscillations de l'intensité lumineuse est $2f$ avec $f =$

$\frac{2\pi c}{\lambda}$, *que l'on a évalue à* $\approx 1 \times 10^{15}$ Hz. *Cette fréquence est bien plus élevée que la fréquence de coupure. Les variations temporelles de l'intensité lumineuse ne seront donc pas visibles sur la photodiode.*

On cherche maintenant à exprimer $I(M)$ en fonction de x. Vous remarquerez qu'on est dans une situation où $L \ll D$ et $a \ll D$. On admet que pour $\epsilon \ll 1$, $(1+\epsilon)^\gamma \approx 1 + \gamma\epsilon$

9. Exprimer $r_1(x)$ et $r_2(x)$ et en déduire $\Delta\phi(x)$.

   $r_1(x) = D(1 + \frac{(x+a)^2}{2D^2})$ *et* $r_2(x) = D(1 + \frac{(x-a)^2}{2D^2})$ *Donc*

   $$\Delta\phi = k\frac{2ax}{D}$$

10. Tracer $I(x)$. Donner l'interfrange i, distance entre deux maxima d'intensité lumineuse.

   $$I_{moyen}(x) = \frac{I_0}{2}(1 + \cos(2kax/D))$$

   Fonction sinusoïdale de valeur moyenne (spatiale) $\frac{I_0}{2}$ *et de période spatiale* i *telle que :*

   $$2kai/D = 2\pi \implies i = \frac{\lambda D}{2a}$$

11. Comparer l'inter-frange à la distance entre deux photodiodes. Le capteur est-il adapté pour imager les interférences lumineuses ?

   L'intervalle entre deux photodiode $(L/1024)$ *est bien plus petit que l'intterfrange. Entre deux inter-franges, on aura donc fait l'acquisition de plusieurs points entre deux franges. Les variations d'intensité lumineuse spatiale seront donc bien visibles.*

On souhaite tenir compte de la diminution de l'amplitude du champ électrique avec la distance. On modélise cette dépendance par une diminution proportionnelle au carré de la distance, autrement dit : $E_1(M,t) = \alpha\frac{E_0}{r_1^2}e^{i(\omega t - kr_1)}$, Il en est de même pour E_2.

12. Rappeler ou retrouver la formule des interférences pour l'amplitude totale A_{12} issue de la somme de deux ondes d'amplitude A_1 et A_2 et de phase ϕ_1 et ϕ_2.

   $E_{12}^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos(\phi_1 - \phi_2)$

13. En déduire l'intensité lumineuse moyenne en M, toujours en tenant compte de $D \gg a$ et $D \gg L$. Simplifiez au maximum votre expression.

   Puisque $I \propto E^2$, *et que pour chaque onde sphérique :* $E \propto \frac{1}{r^2}$

   $$I(M) \propto \left(\frac{1}{r_1^4} + \frac{1}{r_2^4} + \frac{2}{r_1^2 r_2^2}\cos(k\frac{2ax}{D})\right)$$

   avec :

   $$r_1^2 = D^2 + (x-a)^2 \approx D^2$$

   et de même pour r_2, *soit :*

   $$I(M) \propto \frac{2}{D^4}\left(1 + \cos(k\frac{2ax}{D})\right)$$